

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Mestrado em Matemática Aplicada



DOUGLAS AZEVEDO SANT'ANNA

Derivadas Fracionárias, Funções Contínuas Não-Diferenciáveis e Dimensões

Santo André

14/12/2009

Douglas Azevedo Sant'Anna

DERIVADAS FRACIONÁRIAS, FUNÇÕES CONTÍNUAS
NÃO DIFERENCIÁVEIS E DIMENSÕES

Dissertação

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação
Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Venegeroles Nascimento

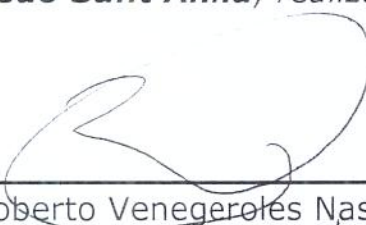
Santo André- SP
2009




Universidade Federal do ABC

**Serviço Público Federal
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

*Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliaram e aprovaram a defesa de Dissertação de Mestrado do candidato **Douglas Azevedo Sant'Anna**, realizada em 14 de dezembro de 2009:*



Dr. Roberto Venegeroles Nascimento (UFABC)



Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (UNICAMP)



Dr. Eduardo Guéron (UFABC)

Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca da Universidade Federal do ABC

SANT'ANNA, Douglas Azevedo

Derivadas Fracionárias, Funções Contínuas não diferenciáveis e Dimensões / Douglas Azevedo Sant'Anna — Santo André : Universidade Federal do ABC, 2009.

78 f. 29 cm

Orientador: Roberto Venegeroles Nascimento

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Centro de Matemática, Computação e Cognição, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2009.

Referencias Bibliográficas: f. 67 - 69

1. Funções Contínuas não-diferenciáveis 2. Derivadas fracionárias. 3. Função de Weierstrass. 4. Expoente de Hölder. 5. Dimensão Baz-Counting. 6. Fractais I. Nascimento, Roberto Venegeroles II. Universidade Federal do ABC, Centro de Matemática, Computação e Cognição, Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, 2009. III. Título.

CDD 516.5

Aos meus irmãos e minha mãe, base da minha vida.
À Deus acima de tudo.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus.

Aos meus irmãos, minha mãe e Michele agradeço por serem meu porto seguro.

Às amizades feitas, estas levarei para sempre.

Professor Roberto Venegeroles, agradeço pela orientação, amizade, dedicação e confiança.

Aos professores Roldão da Rocha Júnior, Maurício Firmino Silva Lima, Valério Ramos Batista, Eduardo Gueron, Cristian Favio Coletti, Carlos José Amado Pires, Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-UNICAMP) e Rubens de Figueiredo Camargo (UNESP) agradeço pelas valiosas sugestões.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e a todos funcionários da UFABC.

À Universidade Federal do ABC e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES pelo financiamento deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, tivemos por principal objetivo o estudo das construções e propriedades de derivadas fracionárias associado à análise de funções contínuas não-diferenciáveis (FCND). Centramos, particularmente, nossas atenções nas derivadas de Riemann-Liouville e nas derivadas fracionárias locais (DFL). Dada a característica fractal do gráfico de uma FCND, interessantes conexões surgem relacionando a ordem de diferenciabilidade fracionária local de uma FCND com a dimensão *box-counting* do gráfico da mesma, sendo esta conexão intermediada pelo expoente de Hölder que caracteriza a função. Apresentamos ainda algumas generalizações de resultados do cálculo clássico, tais como a expansão de Taylor e o teorema de Rolle utilizando a definição de derivada fracionária local.

Palavras-chave: Funções Contínuas Não-Diferenciáveis, Derivadas Fracionárias, Função de Weierstrass, Expoente de Hölder, Dimensão *Box-Counting*, Fractais.

Abstract

In this work, we had as main goal the study of constructions and properties of fractional derivatives associated to the study of continuous nowhere differentiable functions (CNDF). In this study, we focus our attention on the Riemann-Liouville definition and local fractional derivatives (LFD). Due to the fractal character of the graph of these functions, interesting connections appear relating the order of the local fractional differentiability of a CNDF with the box-counting dimension of its graph. This connection is given by the Hölder exponent that characterizes the function. We also present some generalizations of results from the classical calculus such as Taylor expansion and Rolle's theorem using the definition of local fractional derivative.

Keywords: Continuous Non-Differentiable Functions, Fractional Derivatives, Weierstrass Function, Hölder Exponent, Box-Counting Dimension, Fractals.

Sumário

Lista de Figuras	v
1 Introdução	1
2 Funções Contínuas Não-Diferenciáveis	4
2.1 Introdução	4
2.2 Função de Weierstrass	5
2.3 Um pouco mais sobre FCND	10
2.3.1 Função de Bolzano	10
2.3.2 Função de Cellèrier	11
2.3.3 Função de Riemann	12
2.3.4 Função de Darboux	13
3 Diferenciação e Integração de Ordem Arbitrária	15
3.1 Introdução e Definições	15
3.1.1 Derivada e Integral Fracionárias de Riemann-Liouville	16
3.2 Propriedades da Derivada e Integral de Riemann-Liouville	18
3.3 Alguns Exemplos	25
4 Derivadas Fracionárias e o Expoente de Hölder	29
4.1 Condição de Hölder	29
4.2 Ordem de Derivação Fracionária e a Condição de Hölder	31
4.3 Derivadas Fracionárias Locais e a Condição de Hölder	36
5 Dimensão Fractal	45
5.1 Fractais	45
5.1.1 Introdução	45
5.1.2 Definições	46
5.1.3 Exemplos	50
5.2 Dimensão de Gráfico: Definições e Resultados	52
6 Conclusões	56
A Séries, Sequências e Convergência	58
B Propriedades Elementares da Função Gama	61
Referências Bibliográficas	67

Lista de Figuras

2.1	Função de Weierstrass 2.2.	5
2.2	Função de Weierstrass Generalizada 2.9, com $a = 0.8$ e $b = 1.5$	9
2.3	Função de Weierstrass 2.10, $\lambda = 1.5$, $s = 1.1$, $s = 1.3$, $s = 1.7$ e $s = 1.9$ em $[0, 6]$	10
2.4	Os três primeiros elementos da sequência $\{B_k(x)\}$, com $[a, b] = [0, 20]$ e $[A, B] = [4, 16]$. B_1 (pontilhado), B_2 (tracejado) e B_3 (contínua).	11
2.5	Função de Cellèrier, $C(x)$ com $a = 2$ em $[0, 3]$	12
2.6	Função de Riemann, $R(x)$ em $[-1, 1]$	13
2.7	Função de Darboux, $D(x)$ em $[0, 3]$	14
5.1	Gráfico $(s, \mathcal{H}^s(F))$ de um dado conjunto F . O valor crítico de s onde ocorre o salto de 0 para ∞ é definido como a dimensão de Hausdorff.	48
5.2	Cobertura de uma curva, uma superfície e um cubo sólido com uso de “cubos” de aresta ϵ	49
5.3	Conjunto Ternário de Cantor (Poeira de Cantor).	51
5.4	Curva de von Koch.	52
B.1	Função de gama em $(-1, 0) \cup (0, \infty)$	63
B.2	Função gama, domínio $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$	64
B.3	Função gama.	64

Capítulo 1

Introdução

A possibilidade de uma função contínua não ser diferenciável em nenhum ponto de seu domínio passou despercebida pela comunidade matemática por quase um século e meio. Até então, diversas justificativas teóricas surgiram com o intuito de embasar a crença de que toda função contínua seria diferenciável em algum subconjunto não vazio de seu domínio. Weierstrass foi o primeiro matemático a publicar um exemplo de função contínua não-diferenciável (equação 2.1), embora Bolzano e Cellèrier já tivessem construído seus próprios exemplos quarenta anos antes, os quais foram publicados posteriormente ¹ ao resultado de Weierstrass. Após Weierstrass, as funções contínuas não-diferenciáveis (FCND) ainda foram deixadas de lado por mais de três décadas pois, ao que se parecia à época, não possuíam aplicações físicas de interesse prático e eram, inclusive, vistas como aberrações. Hermite as considerava como um “mal-deplorável” e uma “terrível praga”. Poincaré, na época pupilo de Hermite, escrevera sobre a construção de Weierstrass e similares:

“Yesterday, if a new function was invented it was to serve some practical end; today they are specially invented only to show up the arguments of our fathers, and they will never have any other use.”

A idéia de não aplicabilidade associada às FCND seria desmentida três décadas mais tarde. No estudo do movimento Browniano, Perrin confirmou experimentalmente (1908) o caráter irregular (não suave) da trajetória descrita por uma partícula imersa num meio fluido.

Nos anos 70, Mandelbrot [[Mandelbrot1977](#)] ressaltara a não-analiticidade de fenômenos naturais relacionando-os com suas propriedades fractais:

*“Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and a bark is not smooth, nor does a lightning travel in a straight line...
More generally, I claim that many patterns of Nature are so irregular and fragmented... ”.*

¹No caso de Cellèrier, postumamente.

O fato de uma função contínua poder ser suficientemente irregular de forma que seu gráfico seja fractal (característica intrínseca das FCND), trouxe um novo campo de aplicações para estes objetos. Na verdade muitos fenômenos naturais, quando observadas suas evoluções temporais, apresentam fractalidade. Podemos citar como exemplos a evolução da frequência cardíaca², da velocidade do vento, da oscilações da bolsa de valores, dentre diversos outros fenômenos [Falconer1990].

O cálculo fracionário, nascido no ano de 1695 a partir de uma carta na qual L'Hospital perguntava a Leibniz o significado da expressão $d^{\frac{1}{2}}x$, teve a atenção de grandes matemáticos como Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann e Laurent, os quais criaram diversas definições para derivadas e integrais de ordem arbitrária. O cálculo fracionário tem por principal interesse a extensão das operações de derivação e integração de ordem inteira para ordens arbitrárias (reais e até mesmo complexos). Nas últimas décadas, muitos problemas da física-matemática foram generalizados com o cálculo fracionário, dentre os quais podemos citar: o estudo de problemas difusivos [Schneider and Wyss1989], do cálculo variacional [Agrawal2006], de teoria cinética [Zaslavsky2002] dentre outros.

Atualmente existem diferentes definições de derivadas fracionárias. Tendo em vista o estudo local de FCND, analisaremos neste trabalho a definição dada por Kowangar e Gangal [Kolwankar and Gangal1996], que é uma modificação da definição usual de Riemann-Liouville [Oldham and Spanier1974]. Tal definição é nomeada de derivada fracionária local (DFL), também conhecida como derivada KG, sendo sua construção motivada pelo interesse de corrigir certos “problemas” inerentes à definição da derivada de Riemann-Liouville. A partir da DFL alguns resultados célebres podem ser generalizados tais como, por exemplo, a expansão de Taylor e o Teorema de Rolle [Adda and Cresson2001]. Vale ressaltar ainda que a fractalidade é uma propriedade inerente aos gráficos das FCND e, curiosamente, a dimensão desses gráficos está diretamente relacionada à ordem da DFL, sendo estudo deste resultado uma das metas da presente dissertação.

Com o interesse de alcançarmos os objetivos mencionados acima, dividimos este trabalho da seguinte forma: no capítulo 2 são apresentadas e discutidas algumas construções de FCND; no capítulo 3 introduzimos os conceitos básicos do cálculo fracionário, sendo apresentadas definições, exemplos e propriedades e também discutidos os problemas inerentes à definição de Riemann-Liouville; o capítulo 4 é destinado à apresentação da definição de expoente de Hölder, o qual terá papel fundamental na obtenção das conexões entre a dimensão do gráfico de uma FCND e a ordem máxima de derivação fracionária da função em questão. Ainda no capítulo 4, apresentaremos e discutiremos a definição de DFL, sendo apresentados dois resultados que mostram a equivalência entre o expoente de Hölder e a ordem da DFL [Adda and Cresson2001, Kolwankar and Gangal1996]. O capítulo 5 é destinado a uma breve introdução à teoria dos fractais, tendo como inter-

²Trabalhos recentes como relacionam a fractalidade da frequência cardíaca com a saúde do coração[Cipra2003, Goldberger et al.2002].

esse principal o cálculo da dimensão de gráficos de funções reais contínuas. Sendo assim, são apresentadas duas das principais definições para o cálculo de dimensão: dimensão de Hausdorff e a dimensão *box-counting*. Também são apresentados neste capítulo alguns resultados que relacionam a dimensão *box-counting* do gráfico de uma função com o seu expoente de Hölder. No capítulo 6 apresentamos as conclusões seguindo, ao final da dissertação, os apêndices e bibliografia.

Capítulo 2

Funções Contínuas Não-Diferenciáveis

“One might encounter instances where using a function without derivative would be simpler than using one that can be differentiated. When this happens, the mathematical study of irregular continua will prove its practical value”.

Perrin.

2.1 Introdução

Até início do século XIX acreditava-se que toda função contínua deveria ser diferenciável em pelo menos algum subconjunto de seu domínio. Ampère tentou dar uma justificativa teórica para tal crença em uma publicação do ano de 1806 intitulada *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions derives*. Contudo, em 18 de Julho de 1872, a comunidade matemática foi surpreendida pela construção dada por Weierstrass: uma função contínua em todo seu domínio embora não-diferenciável em ponto algum deste. A função em questão é:

$$W(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \cos(b^j \pi x) \quad (2.1)$$

sendo $0 < a < 1$ e $b > 1$ um inteiro ímpar positivo tais que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Depois da publicação da função Weierstrass outros matemáticos vieram a publicar seus exemplos, dentre os quais Bolzano e Cellèrier, que tinham obtido suas FCND antes mesmo que Weierstrass. Posteriormente Riemann, Darboux, Peano, Takagi, entre outros também contribuíram com suas construções. Por muito tempo as FCND eram vistas como meros contra-exemplos de não diferenciabilidade e até mesmo como casos patológicos. No entanto, pode ser mostrado que o conjunto das FCND é de segunda categoria, ou seja, quase todas as funções contínuas são FCND [Oxtoby1971]. Formalmente, tem-se o seguinte resultado:

Teorema (Banach-Marzukiewicz) 2.1.1 *O conjunto $\mathcal{ND}([a, b], \mathbb{R})$ das funções contínuas não-diferenciáveis em $[a, b]$ é de segunda categoria em $C([a, b], \mathbb{R})$.*

Prova: Para maiores detalhes sobre a teoria de Categoria e a demonstração deste resultado indicamos [Oxtoby1971].

O resultado enunciado acima pode ser encarado como uma das motivações para o desenvolvimento deste trabalho, uma vez que tal classe de funções, as contínuas não-diferenciáveis, constituem a grande maioria das funções contínuas (no sentido de categoria). Assim, é natural a busca da generalização da operação derivação de modo a abranger tais funções.

2.2 Função de Weierstrass

Em 18 de Julho de 1872 Karl Weierstrass apresentou, durante uma leitura na Academia de Ciências de Berlim, um exemplo de uma função contínua que não possuía derivadas em seu domínio.

$$W(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \cos(b^j \pi x) \quad (2.2)$$

onde a, b são reais tais que $0 < a < 1$ e b é um inteiro ímpar positivo, sendo $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

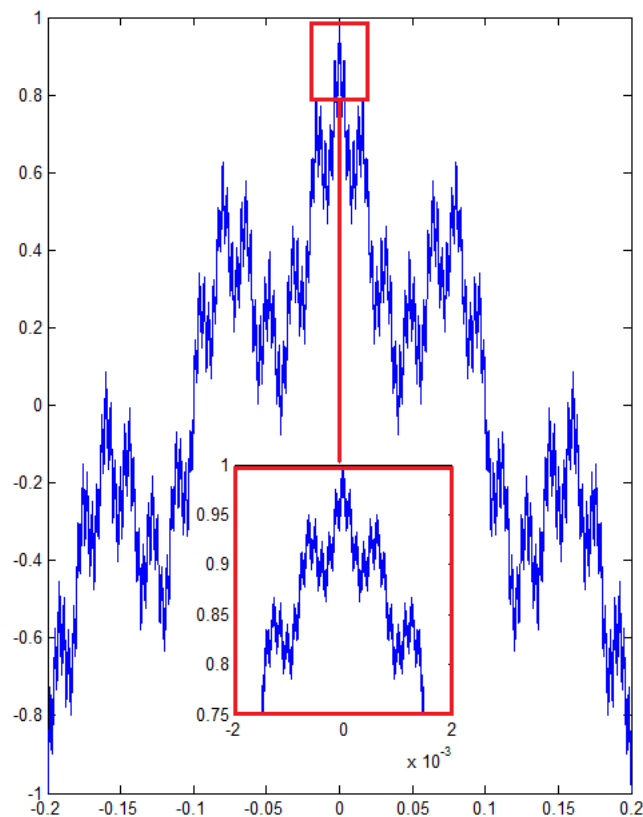


Figura 2.1: Função de Weierstrass 2.2.

Teorema 2.2.1 *A função de Weierstrass, nas condições de 2.2, é contínua e não diferenciável em \mathbb{R} .*

Prova: A continuidade decorre dos seguintes fatos:

- (i) Como $0 < a < 1$, temos que: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty$;
- (ii) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |a^n \cos(b^n \pi x)| \leq a^n$.

Assim, de (i) o Teste de Weierstrass (Teorema A.0.2, Apêndice A) nos diz que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

converge uniformemente em \mathbb{R} . Então digamos que $W(x)$ é este limite uniforme para dado $x \in \mathbb{R}$. Portanto, a continuidade de $W(x)$ segue da convergência uniforme dada pelo Corolário A.0.1.

Para mostramos a não diferenciabilidade, lembrando que $0 < a < 1$, b inteiro ímpar positivo com $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, consideremos $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário mas fixo e $m \in \mathbb{N}$ arbitrário. Escolha $\alpha_m \in \mathbb{Z}$ tal que $b^m x_0 - \alpha_m \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e defina $x_{m+1} = b^m x_0 - \alpha_m$. Fazendo

$$y_m = \frac{\alpha_m - 1}{b^m} \quad \text{e} \quad z_m = \frac{\alpha_m + 1}{b^m}$$

obteremos a seguinte inequação

$$y_m - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{b^m} < 0 < \frac{1 - x_{m+1}}{b^m} = z_m - x_0 \quad (2.3)$$

portanto $y_m < x_0 < z_m$. Podemos ver facilmente que para $m \rightarrow \infty$ teremos que $y_m \rightarrow x_0^-$ e $z_m \rightarrow x_0^+$. Consideremos primeiro a seguinte razão

$$\begin{aligned} \frac{W(y_m) - W(x_0)}{y_m - x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^n \frac{\cos(b^n \pi y_m) - \cos(b^n \pi x_0)}{y_m - x_0} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \left((ab)^n \frac{\cos(b^n \pi y_m) - \cos(b^n \pi x_0)}{b^n (y_m - x_0)} \right) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{m+n} \frac{\cos(b^{m+n} \pi y_m) - \cos(b^{m+n} \pi x_0)}{(y_m - x_0)} \right) \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Considerando S_1 , lembrando que $\left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \right| \leq 1$, e usando identidades trigonométricas¹, podemos limitar tal soma da seguinte maneira

$$\begin{aligned} |S_1| &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n (-\pi) \text{sen} \left(\frac{b^n \pi (y_m + x_0)}{2} \right) \frac{\text{sen} \left(\frac{b^n \pi (y_m - x_0)}{2} \right)}{b^n \pi \frac{y_m - x_0}{2}} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \pi (ab)^n = \frac{\pi (ab)^m - 1}{ab - 1} \leq \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Agora para a soma S_2 , lembrando que tomamos $y_m = \frac{\alpha_m - 1}{b^m}$, sendo $b > 1$ inteiro ímpar e $\alpha_m \in \mathbb{Z}$, podemos usar as identidades

$$\begin{aligned} \cos(b^{m+n} \pi y_m) &= \cos \left(b^{m+n} \pi \frac{\alpha_m - 1}{b^m} \right) \\ &= \cos(b^n \pi (\alpha_m - 1)) \\ &= [(-1)^{\alpha_m - 1}]^{b^n} \\ &= -(-1)^{\alpha_m} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos(b^{m+n} \pi x_0) &= \cos \left(b^{m+n} \pi \frac{\alpha_m + x_{m+1}}{b^m} \right) \\ &= \cos(b^n \pi \alpha_m) \cos(b^n \pi x_{m+1}) - \text{sen}(b^n \pi \alpha_m) \text{sen}(b^n \pi x_{m+1}) \\ &= [(-1)^{b^n}]^{\alpha_m} \cos(b^n \pi x_{m+1}) - 0 \text{sen}(b^n \pi x_{m+1}) \\ &= (-1)^{\alpha_m} \cos(b^n \pi x_{m+1}) \end{aligned}$$

para reescrever a soma S_2 na forma

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{m+n} \frac{-(-1)^{\alpha_m} - (-1)^{\alpha_m} \cos(b^n \pi x_{m+1})}{-\frac{1+x_{m+1}}{b^m}} \\ &= (ab)^m (-1)^{\alpha_m} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + \cos(b^n \pi x_{m+1})}{1 + x_{m+1}}. \end{aligned}$$

Como todos os termos da série acima são positivos para $x_{m+1} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, podemos obter um minorante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n [1 + \cos(b^n \pi x)]}{1 + x_{m+1}} = \frac{1 + \cos(\pi x)}{1 + x_{m+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n [1 + \cos(b^n \pi x)]}{1 + x_{m+1}} \geq \frac{2}{3}. \quad (2.5)$$

¹ $\cos(x) - \cos(y) = -2 \text{sen} \left(\frac{x+y}{2} \right) \text{sen} \left(\frac{x-y}{2} \right)$.

As inequações em 2.4 e 2.5 garantem a existência de $\epsilon_1 \in [-1, 1]$ e $\eta_1 > 1$ tais que

$$\frac{W(y_m) - W(x_0)}{y_m - x_0} = (-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_1 \left(\epsilon_1 \frac{\pi}{ab - 1} + \frac{2}{3} \right).$$

Da mesma maneira que analisamos a pouco o quociente $\frac{W(y_m) - W(x_0)}{y_m - x_0}$ para o lado esquerdo de 2.3, o lado direito segue de forma análoga, donde obteremos

$$\frac{W(z_m) - W(x_0)}{z_m - x_0} = R_1 + R_2$$

com

$$|R_1| \leq \frac{\pi(ab)^m}{ab - 1}. \quad (2.6)$$

Como $z_m = \frac{\alpha_m + 1}{b^m}$, para $\alpha_m \in \mathbb{Z}$ e $b > 1$ ímpar, teremos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \cos(b^{m+n} \pi z_m) &= \cos \left(b^{m+n} \pi \frac{\alpha_m + 1}{b^m} \right) \\ &= \cos(b^n \pi \alpha_m + 1) \\ &= [(-1)^{b^n}]^{\alpha_m + 1} = -(-1)^{\alpha_m}, \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} R_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{m+n} \frac{-(-1)^{\alpha_m} - (-1)^{\alpha_m} \cos(b^n \pi x_{m+1})}{\frac{1 - x_{m+1}}{b^n}} \\ &= (ab)^m (-1)^{\alpha_m} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1 + \cos(b^n \pi x_{m+1})}{1 - x_{m+1}}. \end{aligned}$$

Novamente podemos encontrar em minorante para a seguinte série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n [1 + \cos(b^n \pi x)]}{1 - x_{m+1}} = \frac{1 + \cos(\pi x)}{1 - x_{m+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n [1 + \cos(b^n \pi x)]}{1 - x_{m+1}} \geq \frac{2}{3}. \quad (2.7)$$

Pelo mesmo argumento anterior, as inequações 2.6 e 2.7 garantem a existência de $\epsilon_2 \in [-1, 1]$ e $\eta_2 > 1$ tais que

$$\frac{W(z_m) - W(x_0)}{z_m - x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \eta_2 \left(\epsilon_2 \frac{\pi}{ab - 1} + \frac{2}{3} \right).$$

Visto que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, que é equivalente a $\frac{\pi}{ab-1} < \frac{2}{3}$, os quocientes analisados (pela esquerda e pela direita) têm sinais opostos e para $m \rightarrow \infty$, $(ab)^m \rightarrow \infty$ fica claro que $W(x)$ não possui derivada em x_0 . Como x_0 foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $W(x)$ não é diferenciável em \mathbb{R} . \square

Em 1916, Hardy [Hardy1916] provou que a função de Weierstrass 2.2 e a função

$$S(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \operatorname{sen}(b^j \pi x), \quad (2.8)$$

são contínuas e não-diferenciáveis para $0 < a < 1$ e $b > 1$ quaisquer, tais que $ab \geq 1$. A partir de 2.2 e 2.8, define-se a função de Weierstrass generalizada (Figura 2.2):

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a^j e^{i b^j \pi x}, \quad (2.9)$$

onde i denota a unidade imaginária. Para $\lambda > 1$ e $1 < s < 2$, fazendo $a = \lambda^{s-2}$ e $b = \lambda$ em 2.8, obtemos uma das formas mais conhecidas da função de Weierstrass [Falconer1990]:

$$W_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \operatorname{sen}(\lambda^n x) \quad (2.10)$$

onde $\lambda > 1$, $1 < s < 2$ para $x \in \mathbb{R}$, figura 2.3. Observemos a partir da figura 2.3, que o gráfico da função 2.10 se torna cada vez mais irregular à medida que s assume valores próximos de 2. Veremos no capítulo 4 que este fato está relacionado com o expoente de Hölder da função.

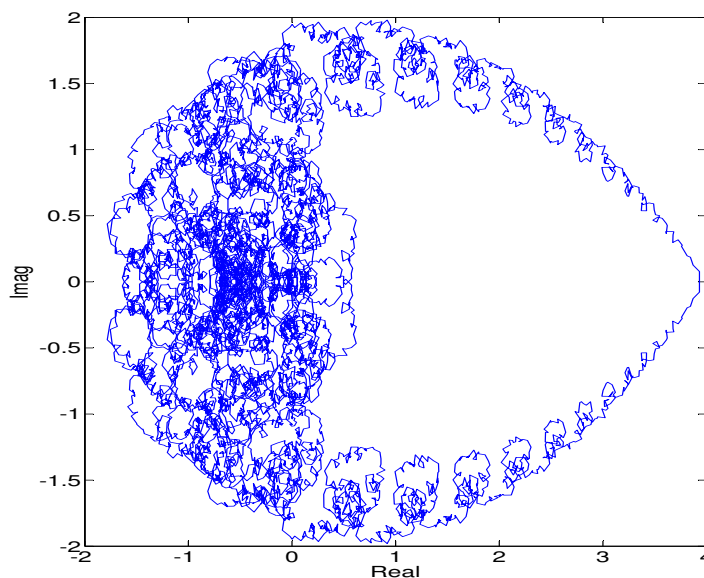


Figura 2.2: Função de Weierstrass Generalizada 2.9, com $a = 0.8$ e $b = 1.5$.

No capítulo 5, verificaremos que o gráfico da função 2.10 é fractal com dimensão igual a s . Particularmente, mostraremos para esta função que a dimensão de seu gráfico está diretamente relacionada à sua diferenciabilidade fracionária.

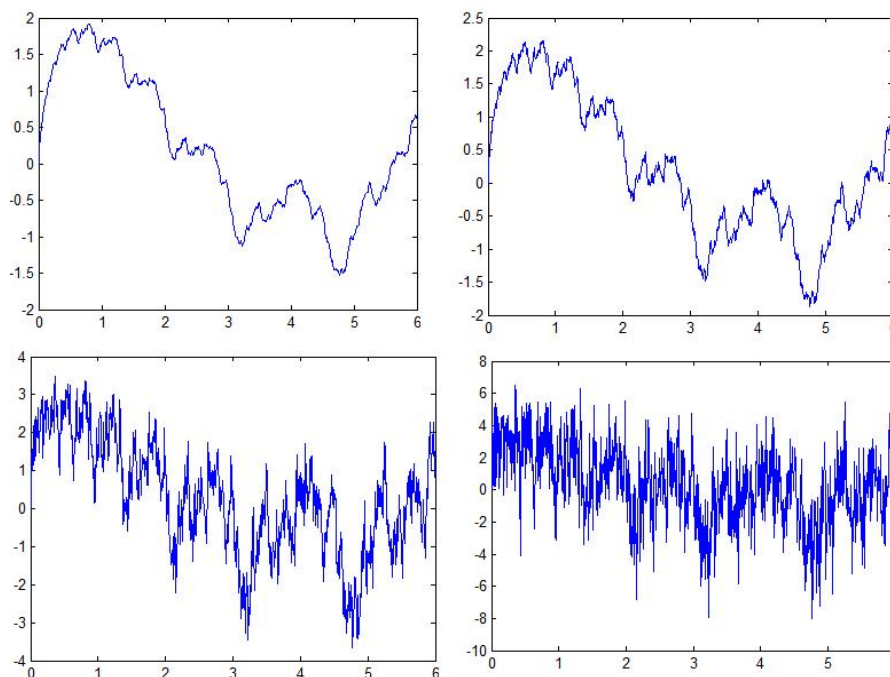


Figura 2.3: Função de Weierstrass 2.10, $\lambda = 1.5$, $s = 1.1$, $s = 1.3$, $s = 1.7$ e $s = 1.9$ em $[0, 6]$.

2.3 Um pouco mais sobre FCND

“I turn away with fear and horror from the lamentable plague of continuous function which do not have derivatives...”

... Hermite ².

Dedicaremos esta seção a uma breve apresentação de mais alguns exemplos destes incríveis e complexos objetos identificando seus respectivos idealizadores e indicando, sempre que possível, alguma referência para maiores aprofundamentos no tema.

2.3.1 Função de Bolzano

Ao que consta, o primeiro exemplo de FCND é atribuído ao matemático Bernard Bolzano em trabalho publicado em 1922, embora construído por volta de 1830 [Thim2003]. Diferente de outras, a função de Bolzano é baseada numa construção geométrica ao invés da utilização de séries infinitas. Esta função é contruída como o limite de uma sequência de funções contínuas $\{B_k\}$ da seguinte maneira: considere os intervalos $[a, b]$, $[A, B]$ e defina:

- $B_1(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x - a)$;
- $B_2(x)$ é definida nos seguintes intervalos

$$I_1 = \left[a, a + \frac{3}{8}(b - a) \right], I_2 = \left[a + \frac{3}{8}(b - a), \frac{1}{2}(a + b) \right],$$

²Citado em [Pinkus2000]

$$I_3 = \left[\frac{1}{2}(a+b), a + \frac{7}{8}(b-a) \right], I_4 = \left[a + \frac{7}{8}(b-a), b \right] \quad (2.11)$$

como uma função linear por partes tendo os seguintes valores

$$\begin{aligned} B_2(a) &= A, B_2\left(a + \frac{3}{8}(b-a)\right) = A + \frac{5}{8}(B-A), \\ B_2\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) &= A + \frac{1}{2}(B-A), \\ B_2\left(a + \frac{7}{8}(b-a)\right) &= B + \frac{1}{8}(B-A), B_2(b) = B; \end{aligned} \quad (2.12)$$

nos extremos;

- $B_3(x)$, é construída da mesma maneira que $B_2(x)$, aplicando-se o procedimento em cada um dos subintervalo I_i . Este processo continua para $k = 4, 5, \dots$ e o limite de $B_k(x)$ para $k \rightarrow \infty$ é a função de Bolzano $B(x)$, representada na figura 2.4.

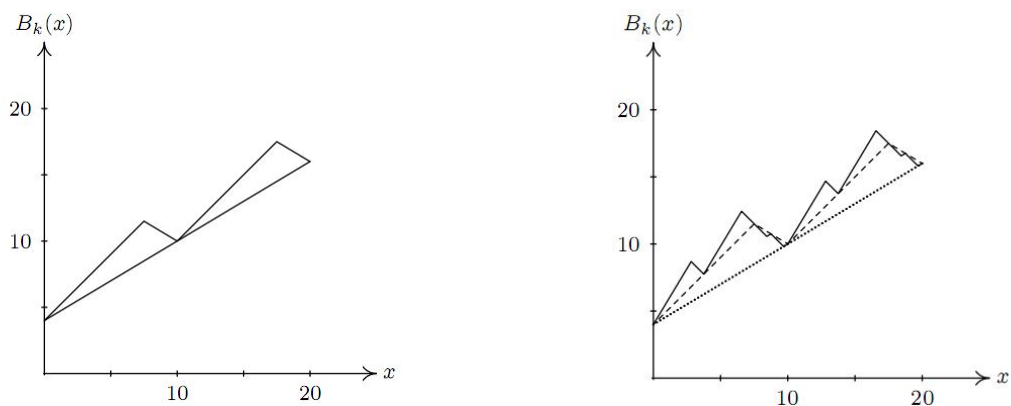


Figura 2.4: Os três primeiros elementos da sequência $\{B_k(x)\}$, com $[a, b] = [0, 20]$ e $[A, B] = [4, 16]$. B_1 (pontilhado), B_2 (tracejado) e B_3 (contínua).

Teorema 2.3.1 *A função de Bolzano B , é contínua e não-diferenciável no intervalo $[a, b]$ (a demonstração pode ser encontrada em [Jarnik1981]).*

2.3.2 Função de Cellèrier

Charles Cellèrier propôs a seguinte função, definida por

$$C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k} \text{sen}(a^k x), \quad a > 1000, \quad (2.13)$$

antes de 1860. No entanto, tal função foi somente publicada em 1890 após sua morte como uma simples curiosidade, visto que a função de Weierstrass já era conhecida [Thim2003].

Na verdade, a função de Cellèrier é similar à de Weierstrass, e sua não-diferenciabilidade segue diretamente da generalização obtida por Hardy (citada na seção 2.2) uma vez que $aa^{-1} \geq 1$ e, se $g(x)$ for não-diferenciável, então $g(\frac{x}{\pi})$ também o será. Desta forma, por [Hardy1916], a condição sobre a pode ser enfraquecida de $a > 1000$ e par para $a > 1$ arbitrário.

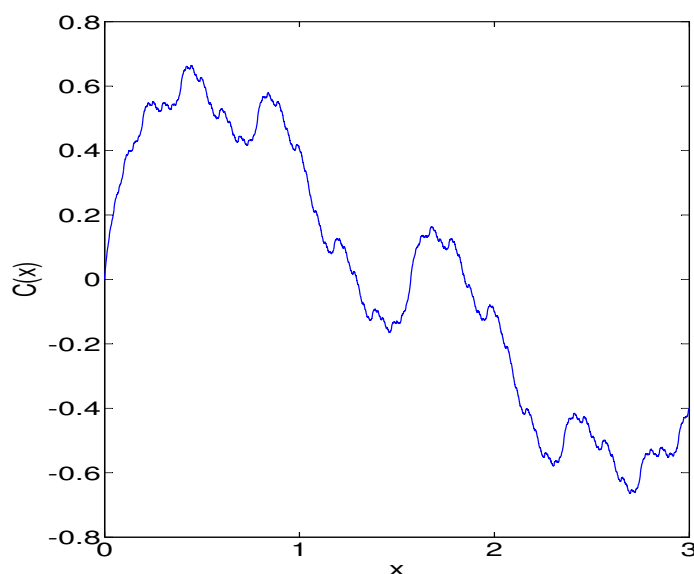


Figura 2.5: Função de Cellèrier, $C(x)$ com $a = 2$ em $[0, 3]$.

Teorema 2.3.2 A função de Cellèrier (2.13) é contínua e não-diferenciável em \mathbb{R} .

Prova: Segue diretamente da demonstração do teorema 2.2.1 e de [Hardy1916].

2.3.3 Função de Riemann

Em 1861, Riemann construiu a função $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{sen}(k^2 x). \quad (2.14)$$

A função $R(x)$ acima definida na verdade não representa uma FCND. Foi mostrado que $R(x)$ tem derivadas finitas ($R'(x_0) = \frac{1}{2}$) em pontos da forma

$$x_0 = \pi \frac{2p+1}{2q+1}, \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Estes pontos são os únicos em que $R(x)$ tem derivada finita [Itatsu1981, Hardy1916, Gerwer1970].

Teorema 2.3.3 A função de Riemann 2.14, é contínua em \mathbb{R} e somente diferenciável nos pontos da forma:

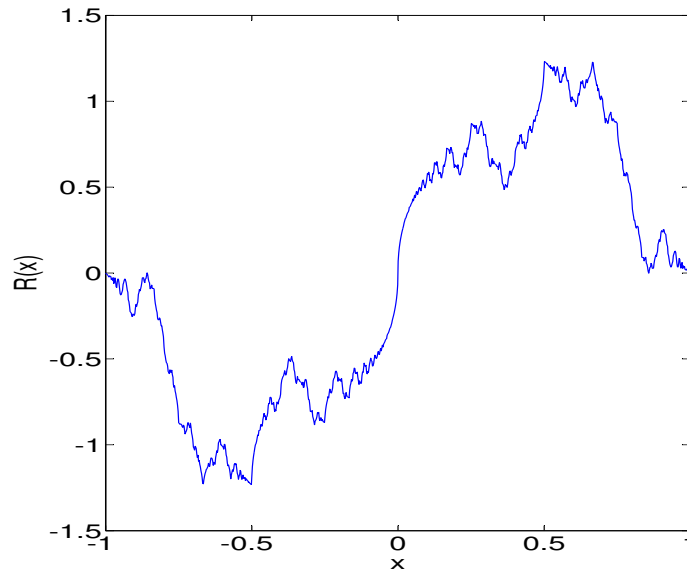


Figura 2.6: Função de Riemann, $R(x)$ em $[-1, 1]$.

$$x_0 = \pi \frac{2p+1}{2q+1}, \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Prova: R é contínua pois:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

e, ainda $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{k^2} \sin(k^2 x) \right| \leq \frac{1}{k^2}$. O teste de Weierstrass (Teorema A.0.2, Apêndice A) prova a convergência uniforme e o Corolário A.0.1 (Apêndice A) nos dá a continuidade de $R(x)$ em \mathbb{R} . A demonstração de que $R(x)$ é diferenciável nos pontos da forma $x_0 = \pi \frac{2p+1}{2q+1}$ pode ser encontrada em [Itatsu1981, Hardy1916, Gerver1970].

2.3.4 Função de Darboux

A função de Darboux, descoberta independente da função de Weierstrass, foi apresentada em 1873 (dois anos antes da primeira publicação da função de Weierstrass) e publicada em 1875 no trabalho intitulado *Mémoire sur les fonctions discontinues*. Neste trabalho, durante uma discussão sobre funções contínuas não-diferenciáveis, Darboux define a seguinte função

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sin((k+1)!x). \quad (2.15)$$

Teorema 2.3.4 A função de Darboux 2.15, é contínua e não-diferenciável em \mathbb{R} .

Prova: A continuidade segue do Teste de Weierstrass (Teorema A.0.2, Apêndice A) e do Corolário A.0.1 (Apêndice A). A prova da não-diferenciabilidade pode ser encontrada

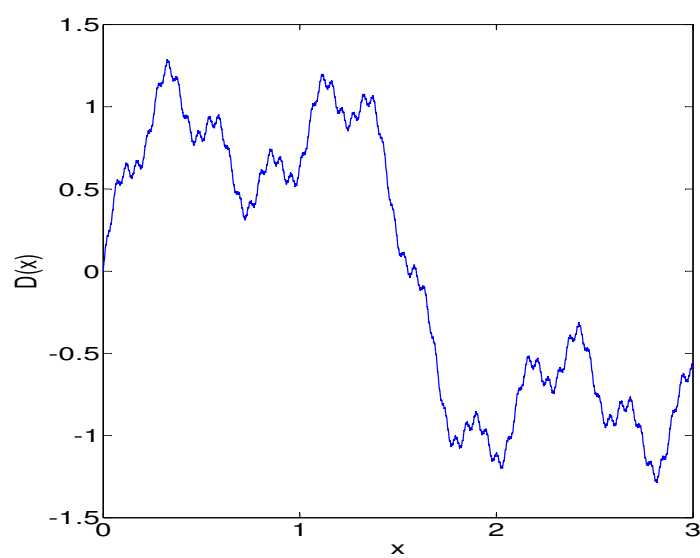


Figura 2.7: Função de Darboux, $D(x)$ em $[0, 3]$.

em [de Rham1957].

Capítulo 3

Diferenciação e Integração de Ordem Arbitrária

“Thus it follows that $d^{\frac{1}{2}}x$ will be equal to $x\sqrt{dx} : x$, an apparent paradox, from which one day useful consequences will be drawn.”

... Leibniz

3.1 Introdução e Definições

O Cálculo Fracionário é um ramo da Análise que tem por interesse a generalização das ordens dos operadores de derivação e integração, isto é, visa a definição e o estudo do significado de expressões do tipo $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}f(x)$ ou ainda $\frac{d^\pi}{dx^\pi}f(x)$. Apesar de pouco divulgada, esta área está longe de ser nova. Ao que tudo indica, o marco fundamental da criação do cálculo fracionário se deu em 1695, (durante o desenvolvimento das idéias clássicas do cálculo, independentemente, por Leibniz e Newton) com a carta de L’Hospital para Leibniz, na qual este era questionado sobre o significado da expressão $d^{\frac{1}{2}}x$. Nos últimos dois séculos, diversas definições de derivadas e integrais fracionárias foram propostas, dentre as quais podemos citar as definições de Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Weyl, Fourier, Caputo [Oldham and Spanier1974, Miller and Ross1993]. Inclusive, um dos problemas em aberto nesta área é a obtenção de uma definição que abrangesse estas definições já citadas ou, pelo menos, as mais utilizadas atualmente. Nas últimas décadas o cálculo fracionário atraiu considerável atenção, sendo utilizado em ampla escala em diversas aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento, como por exemplo: física, engenharia, medicina, economia, entre outros [Hilfer2001].

Dentre as diversas definições existentes para derivação e integração de ordem arbitrária, estamos particularmente interessados na definição de Riemann-Liouville, que será necessária para a apresentação da derivada fracionária local (DLF)(capítulo 4). A DFL foi proposta primeiramente em [Kolwankar and Gangal1996] com o interesse de se obter uma ferramenta que possibilitasse a análise de funções classicamente não-diferenciáveis e generalizasse o conceito de derivada usual. Tal definição, também conhecida como derivada KG (Kowangar e Gangal) é, na verdade, uma aprimoração da definição de Riemann-Liouville, no sentido que a corrige em determinados aspectos que serão discutidos nesta seção e na seção 4.3. Uma vez que neste trabalho temos interesse na con-

construção de Kowangar-Gangal e suas propriedades, dedicaremos esta seção a apresentação e discussão da definição de Riemann-Liouville. Para maiores detalhes indicamos as bibliografias clássicas [Oldham and Spanier1974, Miller and Ross1993, Kilbas et al.2006, Podlubny1998].

3.1.1 Derivada e Integral Fracionárias de Riemann-Liouville

Antes definirmos a integral e a derivada fracionárias de Riemann-Liouville, apresentemos primeiramente a chamada fórmula de Cauchy [Miller and Ross1993]:

Proposição 3.1.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a expressão*

$$\frac{d^{-n}f(x)}{[d(x-a)]^{-n}} = \int_a^x dx_{n-1} \int_a^{x_{n-1}} dx_{n-2} \dots \int_a^{x_1} f(y) dy, \quad (x > a). \quad (3.1)$$

Então

$$\frac{d^{-n}f(x)}{[d(x-a)]^{-n}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy, \quad (x > a). \quad (3.2)$$

Prova:

Para $n = 1$ obtém-se da própria definição

$$\frac{d^{-1}f(x)}{[d(x-a)]^{-1}} = \int_a^x f(y) dy = \int_a^x (x-y)^{1-1} f(y) dy. \quad (3.3)$$

Dessa forma, sendo a proposição válida para $n = 1$, suponhamos que também seja válida para $n = k \in \mathbb{N}$. Então para $n = k + 1$ teremos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^{-(k+1)}f(x)}{[d(x-a)]^{-(k+1)}} &= \int_a^x \frac{d^{-k}}{[d(t-a)]^{-k}} f(t) dt \\ &= \int_a^x \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t f(y)(t-y)^{k-1} dy dt \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x \int_y^x f(y)(t-y)^{k-1} dt dy \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x f(y) \int_y^x (t-y)^{k-1} dt dy \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x f(y) \frac{(t-y)^k}{k} \Big|_{t=y}^{t=x} dy \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x f(y) \frac{(x-y)^k}{k} dy \\ &= \frac{1}{k!} \int_a^x (x-y)^k f(y) dy. \end{aligned}$$

Portanto, a proposição é válida para $k+1$. Por indução, a proposição vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

□.

Definição 3.1.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. A integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda (respectivamente à direita) de ordem $q \in \mathbb{R}$ ($q < 0$)¹ da função f no ponto x , é definida por [Oldham and Spanier1974, Podlubny1998]*

$$\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1+q}} dy, \quad (x > a; q < 0) \quad (3.4)$$

e

$$\frac{d^q f(x)}{[d(b-x)]^q} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_x^b \frac{f(y)}{(y-x)^{1+q}} dy \quad (x < b; q < 0). \quad (3.5)$$

Observemos que a definição acima dada para a integral fracionária é uma generalização da fórmula de Cauchy 3.2 onde $\Gamma(x)$ é a função gama (Veja apêndice B). Quando $q = n \in \mathbb{N}$, a definição 3.4 coincide com a n -ésima integral (Fórmula de Cauchy):

$$\frac{d^{-n} f(x)}{[d(x-a)]^{-n}} = \int_a^x dy_1 \int_a^{y_1} dy_2 \dots \int_a^{y_{n-1}} f(y_n) dy_n \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.7)$$

e

$$\frac{d^{-n} f(x)}{[d(b-x)]^{-n}} f(x) = \int_x^b dy_1 \int_{y_1}^b dy_2 \dots \int_{y_{n-1}}^b f(y_n) dy_n \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (x-y)^{n-1} f(y) dy \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (3.9)$$

Definição 3.1.2 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. A derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda (respectivamente à direita) de ordem $q \in \mathbb{R}$ ($q \geq 0$) da função $f(x)$ é definida por*

$$\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^n}{dx^n} \frac{d^{q-n} f(x)}{[d(x-a)]^{q-n}} \quad (q - n < 0) \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^{q-n+1}} dy, \quad (x > a), \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^q f(x)}{[d(b-x)]^q} &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \frac{d^{q-n} f(x)}{[d(b-x)]^{q-n}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-q)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(y)}{(y-x)^{q-n+1}} dy \quad (x < b), \end{aligned} \quad (3.12)$$

¹Observemos que apesar de constar na definição $q < 0$, podemos utilizar $q > 0$ de modo a escrever $\frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^x f(y)(x-y)^{q-1} dy$.

onde $n - 1 < q \leq n$. Particularmente, fazendo $q = 0$ e $q = n \in \mathbb{N}$, temos a partir de 3.10 (analogamente para 3.12) que

$$\begin{aligned} \frac{d^0 f(x)}{[d(x-a)]^0} = f(x) & \quad \text{e} & \quad \frac{d^n f(x)}{[d(x-a)]^n} = f^{(n)}(x) \\ \frac{d^0 f(x)}{[d(b-x)]^0} = f(x) & \quad \text{e} & \quad \frac{d^n f(x)}{[d(b-x)]^n} = (-1)^n f^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Agora, para $0 < q < 1$ temos que

$$\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^q} dy, \quad (x > a; 0 < q < 1) \quad (3.13)$$

$$\frac{d^q f(x)}{[d(b-x)]^q} = -\frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(y)}{(y-x)^q} dy, \quad (x < b; 0 < q < 1). \quad (3.14)$$

Podemos observar pela definição de 3.10 que o valor da derivada fracionária no ponto x depende diretamente da escolha de $a < x$. Assim, para cada $a < x$ fixado, o valor da derivada de Riemann-Liouville será diferente, e por esse motivo esta derivada é dita ser não-local (quando q não é inteiro). Retomaremos este assunto no capítulo 4 durante a definição da derivada fracionária local.

Uma outra importante observação deve ser feita. Ao se falar em derivada, é imediato que venha a mente a idéia geométrica da inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função. Contudo, a natureza analítica da definição 3.10, a qual é baseada na fórmula de Cauchy 3.2, torna difícil essas interpretações geométricas. Dentre os trabalhos que trataram deste tópico podemos citar especialmente [Podlubny2002].

3.2 Propriedades da Derivada e Integral de Riemann-Liouville

Nesta seção trataremos de algumas propriedades das operações de diferenciação e integração de ordem arbitrárias, no sentido de Riemann-Liouville.

Linearidade e Homogeneidade

Observamos que a derivada (e integral) fracionária é um operador linear:

$$\frac{d^q[f(x) + g(x)]}{[d(x-a)]^q} = \frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} + \frac{d^q g(x)}{[d(x-a)]^q} \quad (3.15)$$

$$\frac{d^q[c f(x)]}{[d(x-a)]^q} = c \frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} \quad (3.16)$$

para qualquer constante c real.

Mudança de Escala

Por mudança de escala da função f com relação a um limite inferior a entenderemos $f(\zeta x - \zeta a + a)$, sendo ζ o fator de escala. Isto é, se $a = 0$, então a mudança de escala

converte $f(x)$ em $f(\zeta x)$ [Oldham and Spanier1974]. Assim, quando o argumento de uma função é alterado por um fator ζ a integral e a derivada fracionárias satisfazem

$$\frac{d^q f(\zeta x)}{[d(x-a)]^q} = \zeta^q \frac{d^q f(\zeta x)}{[d(\zeta(x-a))]^q}. \quad (3.17)$$

De fato, para $q < 0$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{d^q f(\zeta x)}{[d(x-a)]^q} &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x f(\zeta y)(x-y)^{-q-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_{\zeta a}^{\zeta x} f(u) \left(x - \frac{u}{\zeta}\right)^{-q-1} \frac{du}{\zeta} \\ &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_{\zeta a}^{\zeta x} f(u) \frac{(\zeta x - u)^{-q-1}}{\zeta^{-q-1}} \frac{du}{\zeta} \\ &= \zeta^q \frac{d^q f(\zeta x)}{[d(\zeta(x-a))]^q}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A igualdade para $q \geq 0$ prova-se analogamente utilizando a regra da cadeia. A propriedade de escala mostra que esses operadores fracionários estão sujeitos às mesmas leis de potência, sugerindo a existência de propriedades de auto-similaridade como as que ocorrem em conjuntos fractais, (veja capítulo 5). Por exemplo, podemos observar que a função de Weierstrass 2.10 satisfaz a seguinte relação de escala:

$$W_\lambda(\lambda x) \approx \lambda^{s-2} W_\lambda(x). \quad (3.19)$$

Veremos também (capítulo 5) que a dimensão² de seu gráfico é $2 - s$.

Diferenciação e Integração Fracionária Termo a Termo

As regras para se distribuir a derivada e a integral fracionárias ao longo de uma série infinita são análogas àquelas que valem para o caso clássico. Consideremos primeiro o caso $q \leq 0$. Suponha que a série infinita $\sum f_j$ de funções $f_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, integráveis fracionariamente, convirja uniformemente para $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Então f é integrável fracionariamente e:

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^q f_j(x)}{[d(x-a)]^q}. \quad (3.20)$$

De fato, sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ e $S_N(x) = \sum_{j=0}^N f_j(x)$. Sendo $q < 0$, pela definição de integral fracionária de Riemann-Liouville:

$$\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x f(y)(x-y)^{-q-1} dy \quad \text{e} \quad \frac{d^q f_j(x)}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x f_j(y)(x-y)^{-q-1} dy,$$

²Box-Counting.

temos assim que:

$$\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} - \frac{d^q S_N(x)}{[d(x-a)]^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x (f(y) - S_N(y))(x-y)^{-q-1} dy$$

E da hipótese de convergência uniforme temos que para um dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon)$ tal que:

$$|f(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

para todo $n > N$ e $y \in [a, x]$. Então, para $q \leq 0$ e dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon)$ tal que para $n > N$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q} - \sum_{j=0}^N \frac{d^q f_j(x)}{[d(x-a)]^q} \right| &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \left| \int_a^x (f(y) - S_N(y))(x-y)^{-q-1} dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^x |(f(y) - S_N(y))| (x-y)^{-q-1} dy \\ &< \frac{\epsilon}{\Gamma(-q)} \int_a^x (x-y)^{-q-1} dy \\ &= \frac{\epsilon}{q\Gamma(-q)} (x-a)^{-q}. \end{aligned}$$

Donde concluímos [3.20](#).

Para $q > 0$, temos que se $\sum f_j(x)$ e $\sum d^q f_j(x)/[d(x-a)]^q$ convergem uniformemente em $[a, b]$, então [\[Oldham and Spanier1974\]](#):

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^q f_j(x)}{[d(x-a)]^q}, \quad (3.21)$$

uma vez que para cada $j \in \mathbb{N}$, se tenha $\frac{d^{q-n} f_j(x)}{[d(x-a)]^{q-n}} \in C^n[a, b]$, onde $n-1 < q \leq n$ [\[Lima2007\]](#) ³.

Regra de Leibniz (Derivada Fracionária do Produto de Funções)

A fórmula de Leibniz é um importante resultado do cálculo diferencial clássico utilizado para o cálculo da derivada n -ésima ($n \in \mathbb{N}$) do produto de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ (f e g possuindo n derivadas contínuas):

$$\frac{d^n}{dx^n} [f(x)g(x)] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{d^i}{dx^i} f(x) \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} g(x), \quad (3.22)$$

³Observe que $q-n \leq 0$ então como $\sum f_j$ converge uniformemente, vale a igualdade [3.20](#).

onde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ é o coeficiente binomial. Osler [Osler1972a], obteve um resultado geral para a derivada e a integral de ordem arbitrária do produto de funções, dado por:

$$\frac{d^q[f(x)g(x)]}{dx^q} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-\gamma-j+1)\Gamma(\gamma+j+1)} \frac{d^{q-\gamma-j}f(x)}{dx^{q-\gamma-j}} \frac{d^{\gamma+j}g(x)}{dx^{\gamma+j}}, \quad (3.23)$$

onde γ é arbitrário. Uma outra generalização, também dada por Osler [Osler1972b]:

$$\frac{d^q[f(x)g(x)]}{dx^q} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-\gamma-j+1)\Gamma(\gamma+j+1)} \frac{d^{q-\gamma-j}f(x)}{dx^{q-\gamma-j}} \frac{d^{\gamma+j}g(x)}{dx^{\gamma+j}}, \quad (3.24)$$

no qual a soma discreta é substituída por uma integral. Contudo, por hipótese, ambas funções $f(x)$ e $g(x)$ envolvidas devem ser analíticas. Para maiores detalhes indicamos [Oldham and Spanier1974, Camargo2009].

Regra da Cadeia

Sejam $\phi(x)$ uma função analítica e $f(x)$ uma função suficientemente diferenciável. Supondo que $\phi(f(x))$ esteja bem definida, então a regra da cadeia para a derivada fracionária é dada por [Oldham and Spanier1974]:

$$\frac{d^q\phi(f(x))}{[d(x-a)]^q} = \frac{(x-a)^{-q}}{\Gamma(1-q)}\phi(f(x)) + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{q}{j} \frac{(x-a)^{j-q} j!}{\Gamma(j-q+1)} \sum_{m=1}^j \phi^{(m)}(x) \sum_{k=1}^j \frac{1}{P_k!} \left[\frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right]^{P_k} \quad (3.25)$$

onde \sum se estende sobre todas as combinações de valores inteiros não negativos P_1, \dots, P_n tal que $\sum_{k=1}^n k P_k = n$ e $\sum_{k=1}^n P_k = m$. A complicada natureza desta generalização (inclusive para o caso ordinário) dificulta sua utilização.

Série de Taylor-Riemann

Ao que se sabe, Riemann foi o primeiro a trabalhar numa série de Taylor baseada em derivadas fracionárias. Contudo, nenhuma prova deste fato e nenhuma investigação da validade desta série foi produzida até Hardy [Hardy1945] dar suas contribuições ao tema. Osler [Osler1970] foi o primeiro a dar a prova da convergência pontual da série de Taylor generalizada, conhecida atualmente por série de Taylor-Riemann generalizada. Seja então $f(x)$ uma função analítica. A série de Taylor-Riemann de $f(x)$ é dada por [Munkhammar2005, Trujillo et al.1999]:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-a)^{\alpha+n}}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{d^{n+\alpha}f(a)}{[d(z-b)]^{n+\alpha}} \quad (3.26)$$

onde $z > b$, e α é um número real arbitrário.

Regras de Composição

Aqui estamos interessados nas relações entre os operadores [Oldham and Spanier1974, Miller and Ross1993, Podlubny1998]

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \frac{d^Q f(x)}{[d(x-a)]^Q} \quad \text{e} \quad \frac{d^{q+Q} f(x)}{[d(x-a)]^{q+Q}} \quad (3.27)$$

onde $q, Q \in \mathbb{R}$

Para $f = 0$ temos

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \frac{d^Q [0]}{[d(x-a)]^Q} = \frac{d^{q+Q} [0]}{[d(x-a)]^{q+Q}} = 0 \quad (3.28)$$

a regra de composição é trivialmente satisfeita para todos valores de q e Q . Para integrais temos o importante resultado:

Proposição 3.2.1 *Para toda função $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ a integral de Riemann-Liouville satisfaz*

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \frac{d^Q}{[d(x-a)]^Q} f(x) = \frac{d^{q+Q}}{[d(x-a)]^{q+Q}} f(x). \quad (3.29)$$

Prova: Diretamente da definição temos

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \frac{d^Q}{[d(x-a)]^Q} f(x) = \frac{1}{\Gamma(q)\Gamma(Q)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-q}} \int_a^x \frac{du}{(t-u)^{1-Q}}. \quad (3.30)$$

Utilizando o teorema de Fubini para trocar a ordem de integração e fazendo a mudança de variável $t = u + s(x-u)$, obteremos

$$\begin{aligned} \frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \frac{d^Q}{[d(x-a)]^Q} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(q)\Gamma(Q)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-q}} \int_a^x \frac{du}{(t-u)^{1-Q}} \\ &= \frac{B(q, Q)}{\Gamma(q)\Gamma(Q)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-q-Q}} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(q+Q)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-q-Q}} du \\ &= \frac{d^{q+Q}}{[d(x-a)]^{q+Q}} f(x) \quad \square \end{aligned}$$

Agora, sejam $n-1 < q < n$ e $x > a$. Então, diretamente da definição 3.11 e da proposição anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \frac{d^{-q}}{[d(x-a)]^{-q}} f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \frac{d^{q-n}}{[d(x-a)]^{q-n}} \frac{d^{-q}}{[d(x-a)]^{-q}} f(x) \right\} \\ &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{d^{-n}}{dx^{-n}} f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(y)(x-y)^{n-1} dy \right\} \quad (3.31) \\
 &= f(x),
 \end{aligned}$$

sendo utilizado na igualdade 3.31 a fórmula de Cauchy (Equação 3.2). Concluimos portanto que, para dado $q > 0$, com $n-1 < q < n$, vale:

$$\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} \frac{d^{-q}}{[d(x-a)]^{-q}} f(x) = f(x).$$

Proposição 3.2.1 *Sejam $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ e $x > a$ tal que $\frac{d^q}{[d(x-a)]^q} f(x)$ ($k-1 < q < k$) é integrável. Então*

$$\frac{d^{-q}}{[d(x-a)]^{-q}} \frac{d^q}{[d(x-a)]^q} f(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k \left[\frac{d^{q-j} f(x)}{[d(x-a)]^{q-j}} \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}. \quad (3.32)$$

Prova: Temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{-q}}{[d(x-a)]^{-q}} \frac{d^q}{[d(x-a)]^q} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^x \frac{d^q f(y)}{[d(x-a)]^q} (x-y)^{q-1} dy \\
 &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_a^x \frac{d^q f(y)}{[d(x-a)]^q} (x-y)^q dy \right\}. \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, integrando por partes repetidamente e utilizando a regra para a composição de integrais fracionárias obtemos

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_a^x \frac{d^q f(y)}{[d(y-a)]^q} (x-y)^q dy = \frac{1}{\Gamma(q+1)} \int_a^x \left(\frac{d^k}{dx^k} \frac{d^{q-k} f(y)}{[d(y-a)]^{q-k}} \right) (x-y)^q dy \\
 &= \frac{1}{\Gamma(q-k+1)} \int_a^x \frac{d^{q-k} f(y)}{[d(y-a)]^{q-k}} (x-y)^{q-k} dy - \sum_{j=1}^k \left[\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}} \frac{d^{q-k} f(x)}{[d(x-a)]^{q-k}} \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{q-j+1}}{\Gamma(q-j+2)} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(q-k+1)} \int_a^x \frac{d^{q-k} f(y)}{[d(y-a)]^{q-k}} (x-y)^{q-k} dy - \sum_{j=1}^k \left[\frac{d^{q-j} f(x)}{[d(x-a)]^{q-j}} \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{q-j+1}}{\Gamma(q-j+2)} \quad (3.34) \\
 &= \frac{d^{k-q-1}}{[d(x-a)]^{k-q-1}} \frac{d^{q-k} f(x)}{[d(x-a)]^{q-k}} - \sum_{j=1}^k \left[\frac{d^{q-j} f(x)}{[d(x-a)]^{q-j}} \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{q-j+1}}{\Gamma(q-j+2)} \\
 &= \frac{d^{-1}}{[d(x-a)]^{-1}} f(x) - \sum_{j=1}^k \left[\frac{d^{q-j} f(x)}{[d(x-a)]^{q-j}} \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{q-j+1}}{\Gamma(q-j+2)}. \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

A existência de todos os termos no somatório em 3.34 decorre da integrabilidade (limitação) de $\frac{d^q f(x)}{[d(x-a)]^q}$, pois devido a esta condição as derivadas fracionárias $\frac{d^{q-j} f(x)}{[d(x-a)]^{q-j}}$, $j = 1, \dots, k$ são todas limitadas em $x = a$. Desta forma, combinando 3.33 e 3.35, concluimos a prova.

Particularmente, para $0 < q < 1$:

$$\frac{d^{-q}}{[d(x-a)]^{-q}} \frac{d^q}{[d(x-a)]^q} (f(x) - f(a)) = f(x) - f(a) - \left[\frac{d^{q-1}(f(x) - f(a))}{[d(x-a)]^{q-1}} \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{q-1}}{\Gamma(q)}. \quad (3.36)$$

Logo, para $0 < q < 1$, vale a igualdade $\frac{d^{-q}}{[d(x-a)]^{-q}} \frac{d^q}{[d(x-a)]^q} (f(x) - f(a)) = f(x) - f(a)$ se tivermos

$$\left[\frac{d^{q-1}(f(x) - f(a))}{[d(x-a)]^{q-1}} \right]_{x=a} = 0, \quad (3.37)$$

isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{d^{q-1}}{[d(x-a)]^{q-1}} (f(x) - f(a)) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \lim_{x \rightarrow a} \int_a^x (f(y) - f(a))(x-y)^{-q} dy = 0.$$

Como $f(x) - f(a)$ é contínua em $[a, b]$ temos que existe $M \geq 0$ tal que $|f(x) - f(a)| \leq M$. Então

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^{q-1}}{[d(x-a)]^{q-1}} (f(x) - f(a)) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_a^x (f(y) - f(a))(x-y)^{-q} dy \right| \\ &\leq \left| \frac{M}{\Gamma(1-q)} \int_a^x (x-y)^{-q} dy \right|. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema de comparação de limites

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{d^{q-1}}{[d(x-a)]^{q-1}} (f(x) - f(a)) \right| = 0.$$

Resumindo, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $0 < q < 1$ com $\frac{d^q(f(x) - f(a))}{[d(x-a)]^q}$ integrável, então

$$f(x) - f(a) = \frac{d^{-q}}{[d(x-a)]^{-q}} \frac{d^q}{[d(x-a)]^q} (f(x) - f(a)). \quad (3.38)$$

Finalizando as regras de composição, temos as seguintes igualdades [Podlubny1998]: Para $m-1 < p < m$ e $n-1 < q < n$ valem

$$\frac{d^p}{[d(x-a)]^p} \frac{d^{-q}}{[d(x-a)]^{-q}} f(x) = \frac{d^{p-q}}{[d(x-a)]^{p-q}} f(x), \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{-p}}{[d(x-a)]^{-p}} \frac{d^q}{[d(x-a)]^q} f(x) &= \frac{d^{-p+q}}{[d(x-a)]^{p-q}} f(x) \\ &- \sum_{j=1}^n \left[\frac{d^{q-j} f(x)}{[d(x-a)]^{q-j}} \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{[d(x-a)]^p} \frac{d^q}{[d(x-a)]^q} f(x) &= \frac{d^{p+q}}{[d(x-a)]^{p+q}} f(x) \\ &- \sum_{j=1}^n \left[\frac{d^{q-j} f(x)}{[d(x-a)]^{q-j}} \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{-p-j}}{\Gamma(-p-j+1)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Nesta seção, foram apresentadas algumas das mais importantes propriedades da derivada e integral fracionárias no sentido de Riemann-Liouville. É fato que, desde o início deste trabalho, ressaltamos nossas intenções e interesses: apresentar e discutir a derivada fracionária local (DFL) e sua utilização em funções não diferenciáveis classicamente. As propriedades que foram apresentadas, a saber, série de Taylor-Riemann, regra da cadeia e a regra de Leibniz, exigem das funções envolvidas a diferenciabilidade clássica e mesmo a analiticidade [Oldham and Spanier1974, Camargo2009, Munkhammar2005, Trujillo et al.1999], neste sentido ressaltamos aqui que essas propriedades foram discutidas devido à importância no contexto geral do cálculo fracionário, embora não tenham utilidade direta com relação a nossa meta principal.

3.3 Alguns Exemplos

Dedicamos esta seção ao cálculo de derivadas e integrais fracionárias de algumas funções. Em geral, encontrar a derivada ou integral RL de uma função pode ser muito difícil devido aos cálculos envolvidos. Sendo assim, consideraremos nesta seção alguns exemplos de funções familiares mas que serão de grande utilidade para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho.

A função $f(x) = x^p$

Pela definição de Riemann-Liouville, fazendo o limitante inferior $a = 0$, temos que a integral fracionária de $f(x) = x^p$ é dada por:

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x \frac{y^p}{(x-y)^{q+1}} dy \quad q < 0.$$

Aplicando a mudança de variável $y = xu$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^q x^p}{dx^q} &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^1 \frac{x^p u^p}{(x-xu)^{q+1}} x du \\ &= \frac{x^{p+1} x^{-q-1}}{\Gamma(-q)} \int_0^1 \frac{u^p}{(1-u)^{q+1}} du \\ &= \frac{x^{p-q}}{\Gamma(-q)} B(p+1, -q) \end{aligned}$$

com $p > -1$ e $q < 0$, sendo $B(x, y)$ a função beta (veja Apêndice B). Portanto, obtemos:

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)} x^{p-q}, \quad q < 0, p > -1. \quad (3.42)$$

Para a derivada fracionária, isto é, para $n - 1 < q \leq n$ temos que por 3.10:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^q x^p}{dx^q} &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{d^{q-n} x^p}{dx^{q-n}} \\
 &= \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{x^{p-q+n}}{\Gamma(n-q)} \int_0^1 \frac{u^p}{(1-u)^{q-n+1}} du \right] \\
 &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)} x^{p-q}, \quad q \geq 0, \quad p > -1.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

A partir das Equações 3.42 e 3.43 concluímos que para todo $q \in \mathbb{R}$ a diferintegral⁴ da função $f(x) = x^p$, com $p > -1$ é dada por:

$$\frac{d^q x^p}{dx^q} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)} x^{p-q}, \quad q \in \mathbb{R}, \quad p > -1. \tag{3.44}$$

Observemos o seguinte comportamento do limite abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^q x^p}{dx^q} = \begin{cases} 0 & \text{se } q < p \text{ ou } q = p + n, \text{ com } n \in \mathbb{N} \\ \Gamma(p+1) & \text{se } p = q \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.45}$$

A função constante $f(x) = c$

Para a função constante $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, temos que a derivada de ordem $q \geq 0$, é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{d^q}{dx^q} c &= \frac{d^n}{dx^n} \frac{d^{q-n} c}{dx^{q-n}} \\
 &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^x \frac{c}{(x-y)^{q-n+1}} dy \right) \\
 &= \frac{c}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{1}{(x-y)^{q-n+1}} dy \\
 &= -\frac{c}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{(x-y)^{-q+n}}{-q+n} \right]_{y=0}^{y=x} \\
 &= \frac{c}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \frac{x^{n-q}}{n-q} \\
 &= \frac{c}{\Gamma(n-q)} \frac{\Gamma(n-q+1)}{(n-q)\Gamma(1-q)} x^{-q}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$= \frac{c}{\Gamma(1-q)} x^{-q}, \tag{3.47}$$

⁴Nome dado ao operador que representa simultaneamente a derivada ($q \geq 0$) e a integral ($q < 0$) fracionárias.

onde $n - 1 < q \leq n$ e sendo utilizado em 3.46 o resultado 3.44. Assim, por exemplo, tomando $q = \frac{1}{2}$, obteremos:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}c = \frac{c}{\sqrt{\pi x}} \quad x \neq 0 \quad (3.48)$$

sendo $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (veja Apêndice B). Isto é, $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}c \neq 0$ sempre que $c \neq 0$ com $x \neq 0$. Observe ainda que em $x = 0$ $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}c$ não existe, sendo esta umas diferenças fundamentais entre a derivada clássica e a fracionária. A DFL [Kolwankar and Gangal1996] (ou derivada KG), que apresentaremos no próximo capítulo foi desenvolvida com o interesse de corrigir este fato.

A função exponencial $f(x) = e^x$

Pela expansão de Taylor de e^x temos que:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j+1)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Diferenciando (integrando) fracionariamente termo a termo e usando 3.44 obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{d^q e^x}{dx^q} &= \frac{d^q}{dx^q} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j+1)} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^q x^j}{dx^q} \frac{1}{\Gamma(j+1)} \\ &= x^{-q} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j-q+1)} \\ &= e^x x^{-q} e^{-x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j-q+1)} \\ &= e^x x^{-q} \gamma^*(-q, x), \end{aligned}$$

onde $\gamma^*(q, x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+q+1)}$ é a função gama incompleta (veja apêndice B).

Funções Trigonômétricas

Para as funções trigonométricas $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$ com $0 < q < 1$, temos a seguinte relação:

$$\frac{d^q \text{sen}(x)}{dx^q} = \frac{d^{q-1} \text{cos}(x)}{dx^{q-1}}. \quad (3.49)$$

De fato, das expansões em série de Taylor temos

$$\text{sen } x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} \quad \text{e} \quad \text{cos } x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j}, \quad (3.50)$$

utilizando as regras de diferenciação (integração) fracionária termo a termo e usando a equação 3.44, obtemos que para $0 < q < 1$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^q \operatorname{sen} x}{dx^q} &= \frac{d^q}{dx^q} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \frac{d^q}{dx^q} x^{2j+1} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \frac{\Gamma(2j+2)}{\Gamma(2j-q+2)} x^{2j-q+1} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j-q+1}}{\Gamma(2j-q+2)}
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{d^{q-1} \cos x}{dx^{q-1}} &= \frac{d^{q-1}}{dx^{q-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \frac{d^{q-1}}{dx^{q-1}} x^{2j} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \frac{\Gamma(2j+1)}{\Gamma(2j-q+2)} x^{2j-q+1} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j-q+1}}{\Gamma(2j-q+2)}.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Das igualdades em 3.52 e 3.51, concluímos 3.49, isto é,

$$\frac{d^q \operatorname{sen}(x)}{dx^q} = \frac{d^{q-1} \cos(x)}{dx^{q-1}}. \tag{3.53}$$

Capítulo 4

Derivadas Fracionárias e o Expoente de Hölder

Neste capítulo, temos por interesse definir o expoente de Hölder de uma função $f \in C([a, b])$ e relacioná-lo com a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $0 < q < 1$. Mais que isso, veremos um resultado que garante a existência de derivadas fracionárias de ordem $0 < q < \alpha$, desde que a função possua expoente de Hölder $0 < \alpha < 1$ [Ross et al.1993]. Este resultado é de grande valor devido a dificuldade inerente ao cálculo de derivadas fracionárias mesmo quando se trata de funções mais simples. Como exemplo, calcularemos o expoente de Hölder da função de Weierstrass 2.10, constatando a sua diferenciabilidade no sentido fracionário. Introduziremos em seguida a definição de derivada fracionária local (DFL) [Kolwankar and Gangal1996] tendo em vista a possibilidade de analisar localmente uma FCND. Desta definição serão obtidas interessantes extensões, como a expansão de Taylor fracionária, por exemplo. Apresentaremos também as generalizações dos resultados do cálculo clássico: teorema de Rolle e condições para máximos e mínimos [Adda and Cresson2001].

4.1 Condição de Hölder

Introduziremos agora a definição da condição de Hölder, também conhecida por condição de Lipschitz de ordem. O expoente de Hölder tem um papel fundamental com relação aos principais resultados que pretendemos apresentar estando intimamente ligado a diferenciabilidade fracionária de uma função, exercendo papel análogo ao da condição de Lipschitz no caso da diferenciabilidade clássica.

Definição 4.1.1 *Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $f(x)$ satisfaz a condição de Hölder de ordem $0 < \alpha \leq 1$ (ou simplesmente $f(x)$ é α -Hölder) em $[a, b]$, se para cada $x_0 \in [a, b]$ existir $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$ então*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M |x - x_0|^\alpha, \quad (4.1)$$

para algum M (não dependendo de x e x_0), $x, x_0 \in [a, b]$. O valor α é chamado de expoente de Hölder da função f em x_0 .

No caso de $\alpha = 1$ dizemos que a função satisfaz a condição de Lipschitz e observemos que se $f(x)$, para todo $x \in [a, b]$, é α -Hölder com $\alpha > 1$, então $f(x)$ é constante neste intervalo. Como exemplo, calculemos o expoente de Hölder da função de Weierstrass.

Lema 4.1.1 *Sejam $\lambda > 1$ e $W_\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$W_\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \text{sen}(\lambda^n x) \quad (4.2)$$

onde $1 < s < 2$. Então, para x e $x + h \in [0, 1]$, existe $c > 0$ tal que:

$$|W_\lambda(x + h) - W_\lambda(x)| \leq c |h|^{2-s}. \quad (4.3)$$

Prova: Dado $0 < h < \lambda^{-1}$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}. \quad (4.4)$$

Dessa forma

$$|W_\lambda(x + h) - W_\lambda(x)| \leq \sum_{n=1}^N \lambda^{(s-2)n} |\text{sen}(\lambda^n(x + h)) - \text{sen}(\lambda^n(x))| \quad (4.5)$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} |\text{sen}(\lambda^n(x + h)) - \text{sen}(\lambda^n(x))| \quad (4.6)$$

$$\leq \sum_{n=1}^N \lambda^{(s-2)n} \lambda^n h + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2\lambda^{(s-2)n} \lambda^n$$

onde usamos acima para a soma finita que $|\text{sen}(u) - \text{sen}(v)| \leq |u - v|$, consequência do teorema do valor médio; para os termos restantes, $|\text{sen}(u)| \leq 1$. Portanto

$$\begin{aligned} |W_\lambda(x + h) - W_\lambda(x)| &\leq \sum_{n=1}^N \lambda^{(s-2)n} \lambda^n h + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2\lambda^{(s-2)n} \\ &= h \frac{(\lambda^{s-1} - \lambda^{(s-1)(N+1)})}{1 - \lambda^{s-1}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \\ &= h \frac{(\lambda^{(s-1)N} - 1)}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \\ &\leq h \frac{\lambda^{(s-1)N}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Agora, usando a relação 4.4 em 4.7, obtemos

$$|W_\lambda(x + h) - W_\lambda(x)| \leq c h^{2-s} \quad (4.8)$$

onde $c > 0$ é independente de h . \square

Lema 4.1.2 *Seja $0 < \alpha < 1$. Se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(0) = 0$ é α -Hölder em $[0, 1]$, então a extensão de f , $g : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ f(0) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

é α -Hölder em $(-\infty, 1]$.

Prova: Sendo f α -Hölder, temos que existe $M \geq 0$ tal que para todo $x, y \in [0, 1]$

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha.$$

Sejam $x, y \in (-\infty, 1]$, analisemos os seguintes casos:

1. Se $x, y \in (-\infty, 0]$, então:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |f(x) - f(y)| = 0 \\ &\leq M |x - y|^\alpha; \end{aligned}$$

2. Se $x, y \in (0, 1]$, então:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |f(x) - f(y)| \\ &\leq M |x - y|^\alpha; \end{aligned}$$

3. Se $x \in (0, 1]$ e $y \in (-\infty, 0]$, então:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |f(x) - f(0)| \\ &\leq M |x - 0|^\alpha \leq M |x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

4.2 Ordem de Derivação Fracionária e a Condição de Hölder

Apresentemos agora o resultado que estabelece condições suficientes para a existência de derivadas fracionárias de ordem $0 < \beta < \alpha$, uma vez que a função em questão satisfaça a condição de Hölder de ordem $0 < \alpha \leq 1$. Sem perda de generalidade, considere o limite inferior, do qual a derivada fracionária depende, igual a 0. Isto é:

$$\frac{d^\beta f(x)}{dx^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x f(y)(x - y)^{-\beta} dy, \quad 0 < \beta < 1.$$

Teorema 4.2.1 *Sejam $0 < \beta < \alpha \leq 1$ e $f(x)$ uma função α -Hölder em $[0, 1]$ tal que*

$f(0) = 0$. Se $g : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é a extensão de f definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ f(0) & \text{se } x \leq 0 \end{cases},$$

então $\frac{d^\beta g(x)}{dx^\beta}$ existe para todo $x \in [0, 1]$.

Prova: Por consequência do lema anterior temos que

$$|g(x) - g(y)| \leq M |x - y|^\alpha, \quad \text{para algum } M > 0 \text{ independente de } x \text{ e } y. \quad (4.9)$$

Assim, para $\epsilon > 0$ e $x \in [0, 1]$, definamos

$$g_{1-\beta, \epsilon}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{x-\epsilon} g(y)(x-y)^{-\beta} dy.$$

Lema 4.2.1 Para $x \in [0, 1]$, o limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{x-\epsilon} (x-y)^{-\beta} g(y) dy$ existe.

Prova: Dado $\lambda > 0$, sendo $g(x)$ contínua em $(-\infty, 1]$ e constante em $(-\infty, 0]$, temos que $g(x)$ é limitada. Isto é, existe $R > 0$ tal que $|g(x)| \leq R$, para todo $x \in (-\infty, 1]$. Seja $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos que converge para 0. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \in \mathbb{N}$ com $n > N$: $\epsilon_n < \left(\frac{\lambda(1-\beta)}{2R}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$.

Para $n, m \in \mathbb{N}$, tais que $n > m > N$ e para $x \in [0, 1]$, sendo $\beta - 1 < 0$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{x-\epsilon_n}^{x-\epsilon_m} (x-y)^{-\beta} g(y) dy \right| &\leq \left| \int_{x-\epsilon_n}^{x-\epsilon_m} (x-y)^{-\beta} |g(y)| dy \right| \\ &\leq \left| \int_{x-\epsilon_n}^{x-\epsilon_m} (x-y)^{-\beta} R dy \right| \\ &\leq \left| \frac{R(x-y)^{-\beta+1}}{\beta-1} \right|_{x-\epsilon_n}^{x-\epsilon_m} \\ &= \left| \frac{R[\epsilon_m^{-\beta+1} - \epsilon_n^{-\beta+1}]}{\beta-1} \right| \\ &< \frac{R(\epsilon_m)^{-\beta+1}}{1-\beta} + \frac{R(\epsilon_n)^{-\beta+1}}{1-\beta} \\ &< \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda. \end{aligned}$$

Assim, a sequência de funções $\left(\int_0^{x-\epsilon_n} (x-y)^{-\beta} g(y) dy \right)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e, portanto, converge uniformemente em $[0, 1]$. Logo, o limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{x-\epsilon} (x-y)^{-\beta} g(y) dy$ existe para cada $x \in [0, 1]$ □. Denotemos tal limite por $\int_0^x g(y)(x-y)^{-\beta} dy$ e definamos

$$g_{1-\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x g(y)(x-y)^{-\beta} dy. \quad (4.10)$$

Podemos observar que pela definição de derivada fracionária que $g'_{1-\beta}(x) = \frac{d^\beta g(x)}{dx^\beta}$. Então, para $\epsilon > 0$ e $x \in [0, 1]$

$$\Gamma(1-\beta)g'_{1-\beta,\epsilon}(x) = g(x-\epsilon)\epsilon^{-\beta} - \beta \int_0^{x-\epsilon} (x-y)^{-\beta-1}g(y) dy$$

sendo acima usada a regra de Leibniz¹ para o cálculo de $g'_{1-\beta,\epsilon}(x)$. Por outro lado, se $x \in (0, 1]$, então podemos escrever:

$$\Gamma(1-\beta)g'_{1-\beta,\epsilon}(x) = -[g(x) - g(x-\epsilon)]\epsilon^{-\beta} + x^{-\beta}g(x) + \beta \int_0^{x-\epsilon} (x-y)^{-\beta-1}(g(x) - g(y)) dy. \quad (4.11)$$

Lema 4.2.2 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^{-\beta}(g(x) - g(x-\epsilon)) = 0$, para todo $x \in [0, 1]$.

Prova: Dado $\lambda > 0$ tome $\delta < \left(\frac{\lambda}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$, sendo $M > 0$ de 4.9. Assim, dado $x \in [0, 1]$, se $0 < \epsilon < \delta$ então

$$\left| \frac{g(x) - g(x-\epsilon)}{\epsilon^\beta} \right| \leq \frac{M\epsilon^\alpha}{\epsilon^\beta} = M\epsilon^{\alpha-\beta} < M\delta^{\alpha-\beta} = \lambda.$$

Lema 4.2.3 O limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{x-\epsilon} (x-y)^{-\beta-1}(g(x) - g(y)) dy$ existe para $x \in [0, 1]$.

Prova: Fixando arbitrariamente $\lambda > 0$, seja $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais positivos convergindo para zero. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$: $\epsilon_n < \left(\frac{\lambda(\alpha-\beta)}{2M}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$, com $M > 0$ de 4.9. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $n > m > N$ e $x \in [0, 1]$. Então

$$\begin{aligned} \left| \int_{x-\epsilon_m}^{x-\epsilon_n} (x-y)^{-\beta-1}(g(x) - g(y)) dy \right| &\leq \left| \int_{x-\epsilon_m}^{x-\epsilon_n} |x-y|^{-\beta-1}|g(x) - g(y)| dy \right| \\ &\leq \left| \int_{x-\epsilon_m}^{x-\epsilon_n} M|x-y|^{\alpha-\beta-1} dy \right| \\ &= \left| \frac{-M}{\alpha-\beta}(x-y)^{\alpha-\beta} \right|_{y=x-\epsilon_m}^{y=x-\epsilon_n} \\ &= \frac{M}{\alpha-\beta} |(\epsilon_n)^{\alpha-\beta} - (\epsilon_m)^{\alpha-\beta}| \\ &\leq \frac{M}{\alpha-\beta} (|(\epsilon_n)^{\alpha-\beta}| + |(\epsilon_m)^{\alpha-\beta}|) \\ &< \frac{M}{\alpha-\beta} \left(\frac{\lambda(\alpha-\beta)}{2M} + \frac{\lambda(\alpha-\beta)}{2M} \right) = \lambda. \quad \square \end{aligned}$$

¹Sejam $a(t)$ e $b(t)$ definidas e com derivada contínua em $t_1 < t < t_2$. Seja $f(x, t)$ contínua, com $\frac{\partial f}{\partial t}$ contínua num domínio do plano $x-t$ que inclui $t \in [t_1, t_2]$ e $x \in [a(t), b(t)]$, então para $t_1 < t < t_2$: $\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$

Então para cada $x \in [0, 1]$, a sequência de funções

$$\left(\int_0^{x-\epsilon_n} (x-y)^{-\beta-1} (g(x) - g(y)) dy \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

é uma sequência de Cauchy, portanto uniformemente convergente. Logo o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{x-\epsilon} (x-y)^{-\beta-1} (g(x) - g(y)) dy$$

existe e denotaremos por $\int_0^x (x-y)^{-\beta-1} (g(x) - g(y)) dy$. Assim, definamos para $x \in (0, 1]$

$$h(x) = g(x)x^{-\beta} + \beta \int_0^x (x-y)^{-\beta-1} (g(x) - g(y)) dy, \quad (4.12)$$

isto é, $h(x)$ é o limite de $\Gamma(1-\beta)g'_{1-\beta,\epsilon}(x)$ em $(0, 1]$ (equação 4.11) para $\epsilon \rightarrow 0^+$. Note que para $\epsilon > 0$ dado

$$\begin{aligned} \Gamma(1-\beta)g'_{1-\beta,\epsilon}(0) &= \Gamma(1-\beta) \left(g(-\epsilon)\epsilon^{-\beta} - \beta \int_0^{-\epsilon} g(y)(-y)^{-\beta-1} dy \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Façamos então $h(0) = 0$. Como, para $\epsilon \rightarrow 0^+$, $g'_{1-\beta,\epsilon}(x)$ converge uniformemente para $\frac{h(x)}{\Gamma(1-\beta)}$ em $(0, 1]$ e

$$\Gamma(1-\beta)g'_{1-\beta,\epsilon}(0) = h(0) = 0,$$

para todo $\epsilon > 0$, concluímos que $g'_{1-\beta,\epsilon}(x)$ converge uniformemente para $\frac{h(x)}{\Gamma(1-\beta)}$ em $[0, 1]$.

Lema 4.2.4 $h(x)$ é contínua em $[0, 1]$.

Prova: Como $g(x)$ é contínua em $[0, 1]$ então $h(x)$, por sua própria definição, é contínua em $(0, 1]$. Portanto, basta mostrarmos a continuidade de $h(x)$ em $x = 0$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) = 0.$$

Dado $\lambda > 0$, tome $\delta > 0$ tal que $\delta < \left(\frac{\lambda(\alpha-\beta)}{M\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$. Se $x \in [0, 1]$ de forma que $x < \delta$ então

$$\begin{aligned} |h(x)| &= \left| \beta \int_0^x (g(x) - g(y))(x-y)^{-\beta-1} dy + g(x)x^{-\beta} \right| \\ &\leq \left| \beta \int_0^x |g(x) - g(y)||x-y|^{-\beta-1} dy \right| + |g(x) - g(0)|x^{-\beta} \\ &\leq \left| \beta \int_0^x M(x-y)^{\alpha-\beta-1} dy \right| + Mx^{\alpha-\beta} \\ &= M\beta \left[-\frac{(x-y)^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta} \right]_{y=0}^{y=x} + Mx^{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= M\beta \frac{x^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta} + Mx^{\alpha-\beta} \\
 &= M\alpha \frac{x^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta} \\
 &= M\alpha \frac{\delta^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta} < \lambda.
 \end{aligned}$$

Logo $h(x)$ é contínua em $x = 0$. Portanto $h(x)$ é contínua em $[0, 1]$. \square

Então, para $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
 g_{1-\beta}(x) - g_{1-\beta}(0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (g_{1-\beta,\epsilon}(x) - g_{1-\beta,\epsilon}(0)) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^x g'_{1-\beta,\epsilon}(y) dy \\
 &= \int_0^x \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} g'_{1-\beta,\epsilon}(y) dy \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x h(y) dy.
 \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$g'_{1-\beta}(x) = \frac{h(x)}{\Gamma(1-\beta)}, \quad (4.13)$$

para todo $x \in (0, 1)$. Consideremos agora os pontos $x = 0$ e $x = 1$.

Lema 4.2.5 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g_{1-\beta}(x) - g_{1-\beta}(0)}{x} = \frac{g(0)}{\Gamma(1-\beta)} = 0$.

Prova: Dado $\lambda > 0$, da continuidade de $h(x)$ em $x = 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x < \delta$, com $x \in [0, 1]$, então $|h(x) - h(0)| < \Gamma(1-\beta)\lambda$. Então, para $x < \delta$:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{g_{1-\beta}(x) - g_{1-\beta}(0)}{x} - \frac{g(0)}{\Gamma(1-\beta)} \right| &= \left| \frac{1}{x\Gamma(1-\beta)} \int_0^x h(y) dy \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{x\Gamma(1-\beta)} \int_0^x |h(y) - h(0)| dy \right| \\
 &< \left| \frac{1}{x\Gamma(1-\beta)} \int_0^x \Gamma(1-\beta)\lambda dy \right| \\
 &= \frac{1}{x\Gamma(1-\beta)} \Gamma(1-\beta)\lambda x \\
 &= \lambda.
 \end{aligned}$$

\square

Então, $g_{1-\beta}(x)$ possui derivada à direita em $x = 0$.

Lema 4.2.6 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g_{1-\beta}(1) - g_{1-\beta}(x)}{1-x} = \frac{h(1)}{\Gamma(1-\beta)}$.

Prova: Dado $\lambda > 0$, da continuidade de $h(x)$ em $x = 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - 1| < \delta$, com $x \in [0, 1]$, então $|h(x) - h(1)| < \Gamma(1 - \beta)\lambda$. Então, para $|x - 1| < \delta$:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{g_{1-\beta}(1) - g_{1-\beta}(x)}{1 - x} - \frac{h(1)}{\Gamma(1 - \beta)} \right| &= \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \left| \frac{1}{1 - x} \int_x^1 h(y) dy - h(1) \right| \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \left| \frac{1}{1 - x} \int_x^1 h(y) - h(1) dy - h(1) + h(1) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \frac{1}{1 - x} \int_x^1 |h(y) - h(1)| dy \\
 &= \frac{1}{(1 - x)\Gamma(1 - \beta)} \lambda(1 - x)\Gamma(1 - \beta) dy \\
 &= \lambda. \quad \square
 \end{aligned}$$

Então, $g_{1-\beta}(x)$ possui derivada à esquerda em $x = 1$.

Provamos então $g'_{1-\beta}(x)$ existe para todo $x \in [0, 1]$ e, ainda

$$g'_{1-\beta}(x) = \frac{h(x)}{\Gamma(1 - \beta)}, \quad (4.14)$$

para todo $x \in [0, 1]$. Portanto concluímos que $\frac{d^\beta g(x)}{dx^\beta}$ existe em $[0, 1]$. \square

Pela equação 4.8, a função de Weierstrass é $(2 - s)$ -Hölder em $[0, 1]$, com $0 < 2 - s < 1$. Observemos ainda que $W_\lambda(0) = 0$. Portanto, decorre do teorema acima que a função de Weierstrass possui derivadas fracionárias de ordem β , com $0 < \beta < 2 - s$.

4.3 Derivadas Fracionárias Locais e a Condição de Hölder

A definição de derivada fracionária que vimos no Capítulo 3 difere em alguns aspectos da derivada de ordem inteira. Inicialmente, podemos notar a partir da equação 3.10 que, exceto para q inteiro positivo, a q -ésima derivada é não-local uma vez que depende de um limite inferior que denotamos por a . Ainda, de 3.47 e 3.48 temos que a derivada fracionária da função constante além de não ser igual a zero, pode até não existir. Neste sentido, a derivada fracionária de Riemann-Liouville não pode ser utilizada para se fazer análise local de FCNDs. Desta forma, se temos o interesse de investigar propriedades locais de FCND utilizando as derivadas fracionárias, precisamos de uma modificação adequada desta definição. A construção de um operador local de derivação fracionária requer que os dois fatos mencionados possam ser corrigidos. Kowangar e Gangal [Kolwankar and Gangal1996] e, mais tarde, Adda [Adda and Cresson2001], a partir da definição de derivada de Riemann-Liouville, obtiveram tal modificação da seguinte maneira:

1. Para limitante inferior toma-se o ponto ao qual tem-se interesse em estudar o comportamento da função;

2. Subtrai-se da função o valor que ela assume no ponto que desejamos analisar, desta forma cancelamos o efeito do termo constante.

Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 4.3.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Chamamos de derivada fracionária local à esquerda (respectivamente à direita) de ordem q da função $f(x)$ (denotada por $\mathbb{D}_\pm^q f(x_0)$) no ponto $x_0 \in [a, b]$ a seguinte quantidade*

$$\mathbb{D}_\pm^q f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{d^q(\pm(f(x) - f(x_0)))}{[d(\pm(x - x_0))]^q}, \quad 0 < q \leq 1. \quad (4.15)$$

Observemos diretamente da definição que para a função constante $f(x) = C$:

$$\mathbb{D}_\pm^q C = 0, \quad \text{com } 0 < q \leq 1. \quad (4.16)$$

Ainda, para $q = 1$ a DFL se reduz a derivada usual:

$$\mathbb{D}_+ f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{d(f(x) - f(x_0))}{d(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{df(x)}{d(x - x_0)} = \frac{df(x_0)}{d(x - x_0)} = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Agora, definindo:

$$F(x_0, \pm(x - x_0); q) = \frac{d^q(\pm(f(x) - f(x_0)))}{[d(\pm(x - x_0))]^q}$$

para $0 < q \leq 1$, claramente $F(x_0, 0; q) = \mathbb{D}_\pm^q f(x_0)$. Assim, considerando o caso $x > x_0$ (o outro é análogo) e supondo que vale 3.38, temos que

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{x-x_0} F(x_0, y; q)(x - x_0 - y)^{q-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \left\{ -\frac{F(x_0, y; q)(x - x_0 - y)^q}{q} \Big|_{y=0}^{y=x-x_0} + \int_0^{x-x_0} \frac{dF(x_0, y; q)}{dy} \frac{(x - x_0 - y)^q}{q} dy \right\} \\ &= \frac{\mathbb{D}^q f(x_0)(x - x_0)^q}{\Gamma(1 + q)} + R_q(x, x_0). \end{aligned}$$

Isto é,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\mathbb{D}^q f(x_0)}{\Gamma(1 + q)}(x - x_0)^q + R_q(x, x_0). \quad (4.17)$$

Sendo então obtida uma “expansão fracionária de Taylor” de ordem $q \in (0, 1)$. O que nos leva ao seguinte resultado [Adda and Cresson2001, Kolwankar and Gangal1996]:

Teorema 4.3.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\mathbb{D}_\pm^q f(x_0)$ existe para*

$0 < q \leq 1$. Então se vale 3.38, temos que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\pm \mathbb{D}_{\pm}^q f(x_0)}{\Gamma(1+q)} (\pm(x-x_0))^q + R_{\pm}(x, x_0, q), \quad (4.18)$$

com

$$R_{\pm}(x, x_0, q) = \pm \frac{1}{\Gamma(1+q)} \int_0^{x-x_0} \frac{dF_{\pm}(x_0, \pm y; q)}{dy} (\pm(x-x_0-y))^q dy \quad (4.19)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} \frac{R_{\pm}(x, x_0, q)}{(\pm(x-x_0))^q} = 0. \quad (4.20)$$

Prova: Só nos resta provar 4.20. Temos que

$$\frac{R(x, x_0, q)}{(x-x_0)^q} = \frac{1}{\Gamma(1+q)} \int_0^{x-x_0} \frac{dF(x_0, y; q)}{dy} \left(\frac{x-x_0-y}{x-x_0} \right)^q dy. \quad (4.21)$$

Como, $\left| \frac{x-x_0-y}{x-x_0} \right| < 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{R(x, x_0, q)}{(x-x_0)^q} \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(1+q)} \int_0^{x-x_0} \frac{dF(x_0, y; q)}{dy} \left(\frac{x-x_0-y}{x-x_0} \right)^q \right| dy \\ &< \frac{1}{\Gamma(1+q)} \int_0^{x-x_0} \left| \frac{dF(x_0, y; q)}{dy} \right| dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+q)} (|F(x_0, x-x_0; q)| - |F(x_0, 0; q)|) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+q)} (|F(x_0, x-x_0; q)| - |\mathbb{D}^q f(x_0)|). \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x_0, x-x_0; q) = \mathbb{D}^q f(x_0),$$

obtemos 4.20, concluindo assim a prova. \square

Consideremos a partir de agora, salvo menção contrária, funções $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ satisfazendo a condição 3.38.

Corolário 4.3.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\mathbb{D}_{\pm}^q f(x_0)$ existe para $0 < q \leq 1$. Então*

$$\mathbb{D}_{\pm}^q f(x_0) = \Gamma(1+q) \lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} \frac{\pm(f(x) - f(x_0))}{|x-x_0|^q}, \quad 0 < q \leq 1. \quad (4.22)$$

Corolário 4.3.2 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $0 < q \leq 1$. Se $f(x)$ é q diferenciável em $x_0 \in I$, então $f(x)$ é contínua neste ponto.*

Prova: Como $f(x)$ é q diferenciável em x_0 , temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) - f(x_0) &= \Gamma(1+q) \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0) (\pm(\pm(x-x_0)))^q}{\pm(\pm(x-x_0))^q \Gamma(1+q)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \mathbb{D}_\pm^q f(x_0) \frac{(\pm(\pm(x-x_0)))^q}{\Gamma(1+q)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Corolário 4.3.3 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $0 < q \leq 1$. Se $f(x)$ é diferenciável em $x_0 \in [a, b]$, então $\mathbb{D}_\pm^q f(x_0) = 0$.*

Prova: Como $f(x)$ é diferenciável em $x_0 \in I$, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_\pm^q f(x_0) &= \Gamma(1+q) \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{\pm(f(x) - f(x_0))}{|x - x_0|^q} \\ &= \Gamma(1+q) \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{\pm(f(x) - f(x_0))}{|x - x_0|} \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} |x - x_0|^{1-q} \\ &= \Gamma(1+q) \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f'(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} |x - x_0|^{1-q} = 0. \end{aligned}$$

Proposição 4.3.1 *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e q diferenciáveis ($0 < q \leq 1$), em $x_0 \in [a, b]$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $f + g$, λf e fg são q -diferenciáveis em x_0 e valem:*

- (i) $\mathbb{D}_\pm^q (f + g)(x_0) = \mathbb{D}_\pm^q f(x_0) + \mathbb{D}_\pm^q g(x_0)$;
- (ii) $\mathbb{D}_\pm^q \lambda f(x_0) = \lambda \mathbb{D}_\pm^q f(x_0)$;
- (iii) $\mathbb{D}_\pm^q (fg)(x_0) = g(x_0) \mathbb{D}_\pm^q f(x_0) + f(x_0) \mathbb{D}_\pm^q g(x_0)$
- (iv) $\mathbb{D}_\pm^q \left(\frac{f}{g} \right) (x_0) = \frac{g(x_0) \mathbb{D}_\pm^q f(x_0) - f(x_0) \mathbb{D}_\pm^q g(x_0)}{g^2(x_0)}$, se $g(x) \neq 0$ em todo $[a, b]$.

Prova: Como (i) e (ii) decorrem diretamente, provemos (iii):

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_\pm^q (fg)(x_0) &= \Gamma(1+q) \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{\pm(f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0))}{(\pm(x-x_0))^q} \\ &= \Gamma(1+q) \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{\pm(f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0))}{(\pm(x-x_0))^q} \\ &= \Gamma(1+q) \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \pm \left(g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{(\pm(x-x_0))^q} + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{(\pm(x-x_0))^q} \right) \\ &= g(x_0) \Gamma(1+q) \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{\pm(f(x) - f(x_0))}{(\pm(x-x_0))^q} + f(x_0) \Gamma(1+q) \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{\pm(g(x) - g(x_0))}{(\pm(x-x_0))^q} \\ &= g(x_0) \mathbb{D}_\pm^q f(x_0) + f(x_0) \mathbb{D}_\pm^q g(x_0). \end{aligned}$$

O item (iv) segue de forma análoga.

Proposição 4.3.2 *Sejam g e f funções contínuas em $[a, b]$ e $[g(a), g(b)]$, respectivamente.*

Seja $x_0 \in (a, b)$ tal que $\mathbb{D}_{\pm}^{\beta}g(x_0)$ e $\mathbb{D}_{\pm s^{\pm}}^{\alpha}f(g(x_0))$ existam, com $s^{\pm} = \text{sign}(\mathbb{D}_{\pm}^{\beta}g(x_0))$ e $\alpha, \beta \in (0, 1]$. Então

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha\beta}(f \circ g)(x_0) = s^{\pm} \mathbb{D}_{\pm s^{\pm}}^{\alpha}f(g(x_0)) |\mathbb{D}_{\pm}^{\beta}g(x_0)|^{\alpha}.$$

Prova: Temos que

$$\begin{aligned} & \frac{\pm(f(g(x)) - f(g(x_0)))}{(\pm(x - x_0))^{\alpha\beta}} \\ &= s^{\pm} \frac{\pm s^{\pm}(f(g(x)) - f(g(x_0)))}{(\pm s^{\pm}(g(x) - g(x_0)))^{\alpha}} \left(s^{\pm} \frac{\pm(g(x) - g(x_0))}{(\pm(x - x_0))^{\beta}} \right)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Ainda, quando $x \rightarrow x_0^{\pm}$ temos que, $g(x) \rightarrow g(x_0)^{\pm s^{\pm}}$ pois

$$g(x) = g(x_0) + \pm s^{\pm} \frac{|\mathbb{D}_{\pm}^{\beta}g(x_0)|}{\Gamma(1 + \beta)} (\pm(x - x_0))^{\beta} (1 + R_{\beta}(x)),$$

onde $R_{\beta}(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x_0^{\pm}$. Concluimos então que

$$\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha\beta}(f \circ g)(x_0) = s^{\pm} \mathbb{D}_{\pm s^{\pm}}^{\alpha}f(g(x_0)) (s^{\pm} \mathbb{D}_{\pm}^{\beta}g(x_0))^{\alpha}. \quad \square$$

Proposição 4.3.3 *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ α -diferenciável em $x_0 \in (a, b)$, com $0 < \alpha < 1$.*

- (i) $\pm \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(x_0) > 0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0]$, $\pm(f(x) - f(x_0)) > 0$;
- (ii) $\pm \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(x_0) < 0 \Leftrightarrow \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta)$, $\pm(f(x) - f(x_0)) < 0$.

Prova: Do teorema 4.3.1, temos que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $x \in (x_0 - \delta, x_0]$ ou $x \in [x_0, x_0 + \delta]$,

$$f(x) - f(x_0) = \pm s^{\pm} |\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(x_0)| (\pm(x - x_0))^{\alpha} (1 + R_{\pm}(x)), \quad (4.23)$$

com $s^{\pm} = \text{sign}(\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}f(x_0))$ e $R_{\pm}(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x_0$. Observemos que o sinal de $\pm(f(x) - f(x_0))$ é s^{\pm} . Isto conclui a prova.

Proposição 4.3.4 *Seja f função contínua em $[a, b]$ α -diferenciável em $x_0 \in (a, b)$, com $0 < \alpha < 1$. Então*

- (i) $\mathbb{D}_{-}^{\alpha}f(x_0) \geq 0$ e $\mathbb{D}_{+}^{\alpha}f(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow x_0$ é máximo local;
- (ii) $\mathbb{D}_{-}^{\alpha}f(x_0) \leq 0$ e $\mathbb{D}_{+}^{\alpha}f(x_0) \geq 0 \Leftrightarrow x_0$ é mínimo local;

Prova: (i) (\Rightarrow) Decorre diretamente da proposição 4.3.3.

(\Leftarrow) Seja $x_0 \in (a, b)$ um máximo local. Existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ teremos $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0]$ temos que $\frac{f(x) - f(x_0)}{-(x - x_0)^\alpha} \geq 0$. Tomando o limite obtemos $\mathbb{D}_-^\alpha f(x_0) \geq 0$. Para todo $x \in [x_0, x_0 + \delta)$, como $f(x) - f(x_0) \leq 0$, temos que $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^\alpha} \leq 0$. Obtendo, no limite, $\mathbb{D}_+^\alpha f(x_0) \leq 0$. A prova para (ii) é similar.

Teorema (Rolle) 4.3.2 *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ α -diferenciável com $0 < \alpha < 1$ tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$\mathbb{D}_-^\alpha f(x_0) \geq 0 \text{ e } \mathbb{D}_+^\alpha f(x_0) \leq 0 \text{ ou } \mathbb{D}_-^\alpha f(x_0) \leq 0 \text{ e } \mathbb{D}_+^\alpha f(x_0) \geq 0$$

Prova: A prova segue da proposição 4.3.4 como no caso clássico.

Apresentaremos agora dois resultados que relacionam a DFL e a condição de Hölder. No próximo capítulo, retomaremos estes resultados com o interesse de apresentar uma conexão entre DFL e a dimensão do gráfico da função em questão. A partir de agora, consideremos $\mathbb{D}^q f = \mathbb{D}_+^q f$, salvo menção contrária. Antes, consideremos a seguinte definição:

Definição 4.3.2 *Definimos por ordem crítica de f em x_0 o valor*

$$\alpha = \sup\{q \in (0, 1); \mathbb{D}^q f(x_0) \text{ existem}\}. \quad (4.24)$$

Teorema 4.3.3 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\alpha \in (0, 1)$.*

a) *Se $0 < q < 1$ é tal que*

$$\mathbb{D}^q f(x_0) = 0, \quad \text{para } q < \alpha \quad (4.25)$$

para todo $x_0 \in (a, b)$, então $f(x)$ é α -Hölder em (a, b) .

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^\alpha, \quad \text{para algum } M > 0.$$

b) *Se existir uma sequência $x_n \rightarrow x_0$, tal que*

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{d^q(f(x_n) - f(x_0))}{[d(x_n - x_0)]^q} = \pm\infty, \quad \text{para } q > \alpha$$

para todo x_0 , então $|f(x) - f(x_0)| \geq M|x - x_0|^\alpha$.

Prova: a) Como $\mathbb{D}^q f(x_0) = 0$ para todo $0 < q < 1$ tal que $q < \alpha$, temos que

$$\mathbb{D}^q f(x_0) = \Gamma(1 + q) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^q} = 0.$$

Assim, para dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ então

$$\Gamma(1 + q) \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^q} \right| \leq \varepsilon,$$

isto é:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(1 + q)} |x - x_0|^q, \quad \text{para todo } q < \alpha.$$

Logo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|^\alpha,$$

para $|x - x_0| < \delta$.

b) Se para todo $q > \alpha$, existe (x_n) tal que

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{d^q[f(x_n) - f(x_0)]}{[d(x_n - x_0)]^q} = \infty, \quad \text{para } q > \alpha$$

para qualquer $x_0 \in (a, b)$, então para cada $R > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ de forma que para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, $|x_n - x_0| < \delta$ e $\frac{d^q[f(x_n) - f(x_0)]}{[d(x_n - x_0)]^q} \geq R$, para todo $n > n_0$. A partir da condição 3.38 temos que

$$f(x_n) - f(x_0) = \frac{d^{-q}}{[d(x_n - x_0)]^{-q}} \frac{d^q[f(x_n) - f(x_0)]}{[d(x_n - x_0)]^q}$$

então,

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(x_0) &\geq \frac{R}{\Gamma(q)} \int_{x_0}^{x_n} (x_n - y)^{q-1} dy \\ &= \frac{R}{\Gamma(q+1)} |x_n - x_0|^q. \end{aligned}$$

Ou seja, fazendo $|x_n - x_0| = \delta$, podemos dizer que existe $x \in (a, b)$ com $|x - x_0| < \delta$, tal que

$$f(x) - f(x_0) \geq k_1 \delta^q, \quad \text{para } k_1 = \frac{R}{\Gamma(q+1)}. \quad (4.26)$$

Se tivéssemos

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{d^q[f(x_n) - f(x_0)]}{[d(x_n - x_0)]^q} = -\infty \quad q > \alpha,$$

para qualquer $x_0 \in (a, b)$, então para dado $R > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ de forma que para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, $|x_n - x_0| < \delta$ e $\frac{d^q[f(x_n) - f(x_0)]}{[d(x_n - x_0)]^q} \leq -R$, para todo $n > n_0$. A partir da

condição 3.38 temos que

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(x_0) &\leq -\frac{R}{\Gamma(q)} \int_{x_0}^{x_n} (x_n - y)^{q-1} dy \\ &= \frac{-R}{\Gamma(q+1)} |x_n - x_0|^q, \end{aligned}$$

ou seja, fazendo $|x_n - x_0| = \delta$, temos que para $|x - x_0| < \delta$, com $q > \alpha$

$$f(x) - f(x_0) \leq k_2 |x - x_0|^q, \quad \text{para } k_2 = \frac{-R}{\Gamma(q+1)}. \quad (4.27)$$

Obtemos de 4.26 e 4.27 que para $|x - x_0| < \delta$, com $q > \alpha$

$$|f(x) - f(x_0)| \geq M |x - x_0|^\alpha. \quad \square \quad (4.28)$$

Teorema 4.3.4 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua e $\alpha \in (0, 1)$.*

a) *Supondo que*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M |x - x_0|^\alpha,$$

onde $M > 0$ e $|x - x_0| < \delta$, para algum $\delta > 0$. Então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d^q[f(x) - f(x_0)]}{[d(x - x_0)]^q} = 0, \quad \text{para } q < \alpha,$$

para todo $x_0 \in (a, b)$.

b) *Suponha que para cada $x_0 \in [a, b]$ e para cada $\delta > 0$ exista x tal que $|x - x_0| \leq \delta$ e*

$$|f(x) - f(x_0)| \geq M \delta^\alpha,$$

com $M > 0$ e $\delta < \delta_0$ para algum $\delta_0 > 0$. Então existe uma seqüência $x_n \rightarrow x_0$ tal que

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{d^q(f(x_n) - f(x_0))}{[d(x_n - x_0)]^q} = \pm\infty, \quad q > \alpha$$

para todo $x_0 \in [a, b]$ e $0 < q < 1$.

Prova: a) Supondo que exista uma seqüência $x_n \rightarrow x_0$ tal que

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{d^q(f(x_n) - f(x_0))}{[d(x_n - x_0)]^q} = \pm\infty, \quad \text{para } q < \alpha,$$

com $x_0 \in (a, b)$. Então, pelos argumentos usados para conclusão de 4.26 e 4.27, teríamos que

$$|f(x) - f(x_0)| \geq M |x - x_0|^q \quad (4.29)$$

isto é, uma contradição. Logo

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{d^q(f(x) - f(x_0))}{[d(x - x_0)]^q} = A \quad \text{para } q < \alpha \text{ e } A \text{ constante.}$$

Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que $q + \varepsilon < \alpha$, tomando a derivada de ordem ε temos que, para $x \rightarrow x_0$:

$$\begin{aligned} \frac{d^{q+\varepsilon}(f(x) - f(x_0))}{[d(x - x_0)]^{q+\varepsilon}} &= \frac{d^\varepsilon}{[d(x - x_0)]^\varepsilon} A \\ &= \frac{A}{\Gamma(1 - \varepsilon)} (x - x_0)^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Como $\frac{A}{\Gamma(1 - \varepsilon)} (x - x_0)^{-\varepsilon} \rightarrow \infty$, quando $x \rightarrow x_0$, obtemos novamente uma contradição, a não ser que $A = 0$.

b) Suponha, por absurdo, que para toda sequência de pontos $x_n \rightarrow x_0$ tenhamos

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{d^q(f(x_n) - f(x_0))}{[d(x_n - x_0)]^q} = M < \infty, \quad \text{para todo } q > \alpha. \quad (4.30)$$

Então, pelo Corolário 4.3.1 e como vale 3.38, temos que

$$\mathbb{D}^q f(x_0) = \Gamma(1 + q) \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{(x_n - x_0)^q} = M < \infty, \quad \text{para todo } q > \alpha. \quad (4.31)$$

Logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| \leq \delta$ implica que

$$\left| \Gamma(1 + q) \frac{f(x_n) - f(x_0)}{(x_n - x_0)^q} - M \right| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } q > \alpha \quad (4.32)$$

isto é,

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leq \frac{(|M| + \varepsilon)}{\Gamma(1 + q)} |x_n - x_0|^q, \quad \text{para todo } q > \alpha. \quad (4.33)$$

Concluimos então que $|f(x_n) - f(x_0)| \leq K|x_n - x_0|^\alpha$, o que é absurdo. \square

Concluimos então, a partir dos dois últimos resultados, que o expoente de Hölder e a ordem crítica são equivalentes [Kolwankar and Gangal1996].

Capítulo 5

Dimensão de Gráficos de Funções Contínuas não Diferenciáveis

Neste capítulo apresentaremos resultados que relacionam a dimensão do gráfico de uma função real contínua com seu expoente de Hölder, obtendo assim uma interessante relação entre a ordem da DFL [Kolwankar and Gangal1996, Kolwankar1997] e a dimensão do gráfico de uma função contínua. Na verdade, nosso interesse maior está nos gráficos de funções reais contínuas que são fractais (por exemplo a função de Weierstrass 2.10). Trabalhos recentes [Liang and Su2007, Yao et al.2008] indicam conexões entre a dimensão do gráfico de uma função fractal e a ordem de derivação fracionária. Nas próximas seções trataremos brevemente da teoria dos fractais, tendo em vista a definição de dimensão box-counting, com o interesse de se obter resultados que possibilitem o cálculo da dimensão de gráficos de funções reais contínuas.

5.1 Fractais

5.1.1 Introdução

Grosso modo, fractais são objetos possuindo dimensão não inteira. Convencionalmente, a dimensão de um objeto é dada por um inteiro positivo e esta é definida através do número de coordenadas necessárias para especificar completamente o objeto dado. Desta forma, quando se leva em conta objetos que possam apresentar dimensão não-inteira temos que admitir uma outra maneira de se definir dimensão de forma que esta nova definição independa das coordenadas. A intuição para tais definições provém das idéias básicas de comprimento, área e volume. Um procedimento intuitivo para obtenção de dimensões fracionárias pode ser dado da seguinte forma: se quiséssemos encontrar o comprimento de uma curva suave, poderíamos tomar uma régua de tamanho δ e demarcar a curva em intervalos regulares com o auxílio da régua. O comprimento C da curva é igual ao produto $\delta N(\delta)$, onde $N(\delta)$ representa a quantidade de marcas de tamanho δ feitas na curva. Para tornar esta aproximação do comprimento da curva mais exata, temos que tomar uma régua menor. Esperamos assim que, enquanto δ se aproxime cada vez mais de 0, a quantidade C permaneça limitada e se aproxime de um limite. O pro-

cedimento descrito acima será o mesmo quando tratarmos de áreas e volumes, sendo que nestes casos utilizaremos quadrados de lado δ e cubos de aresta δ , respectivamente, como meio de se obter a dimensão almejada. Então, a área A e o volume V serão dados por $A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 N(\delta)$ e $V = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^3 N(\delta)$. Observemos que as potências de δ correspondem às dimensões dos objetos (conjuntos). Note também que para um “pedaço” de plano o comprimento é infinito, a área é finita e o volume é zero. O valor da dimensão para o qual ocorre o salto do infinito para o zero é chamado de dimensão característica do conjunto. Retomaremos estas idéias mais a frente com o interesse de formalizá-las.

5.1.2 Definições

Existem várias definições de dimensão fractal, cada uma com suas vantagens e desvantagens. Apresentaremos aqui duas das mais importantes e utilizadas definições de dimensão. Contudo, antes das definições, é interessante ressaltarmos algumas das propriedades desejáveis ao se definir dimensão. Dados os conjuntos $E, F \subset \mathbb{R}^n$, então [Falconer1990]:

1. Monotonocidade: Se $E \subset F$, então $\dim E \leq \dim F$.
2. Estabilidade: $\dim(E \cup F) = \max(\dim E, \dim F)$.
3. Estabilidade Enumerável: $\dim(\cup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim F_i$.

As propriedades 2 e 3 implicam, que ao combinarmos um conjunto com outros de dimensão menor, a dimensão do conjunto resultante não muda.

4. Invariância Geométrica: As transformações $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como rotações, translações, dilatações e afim devem manter a dimensão de um dado $F \subset \mathbb{R}^n$
5. Invariância Lipschitziana: Se $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função bi-lipschitziana, isto é

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|, \quad x, y \in F,$$

onde $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, então $\dim f(F) = \dim F$.

6. Conjuntos Enumeráveis: Se F é finito ou enumerável, então $\dim F = 0$.

Esta propriedade é desejável uma vez que a dimensão de um único ponto é zero e, da propriedade de Estabilidade Enumerável, qualquer conjunto enumerável deve ter dimensão nula.

7. Conjuntos Abertos: Se F é aberto em \mathbb{R}^n , então $\dim F = n$.
8. Variedades Suaves: Se F é uma variedade m -dimensional continuamente diferenciável, então $\dim F = m$.

As propriedades 7 e 8 garantem que um conceito estendido de dimensão abranja também a dimensão clássica usual.

Vale observar que existem construções de dimensão que não necessariamente satisfazem todas as propriedades acima. Na verdade, das duas definições que serão apresentadas a seguir, apenas a primeira, dimensão de Hausdorff, cumpre todos os oito itens.

Dimensão de Hausdorff

Introduzida pelo matemático Felix Hausdorff em 1918 e desenvolvida posteriormente por Abram Samoilovitch Besicovitch, é uma das mais importantes definições de dimensão devido à sua aplicabilidade em quaisquer conjuntos. Contudo sua característica abstrata a impossibilita de ser algoritmizada [Falconer1990].

Se U é um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^n , o diâmetro de U é definido por :

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}.$$

Se $\{U_i\}$ é uma coleção enumerável de conjuntos cujo diâmetro é no máximo $\delta > 0$ e que cobre um dado conjunto F , isto é, $F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$, dizemos que $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F . Assim, para dado $\delta > 0$, definamos:

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i \right\} \quad (5.1)$$

onde s é não-negativo. Na equação acima, nós consideramos todas as δ -coberturas possíveis de F e tomamos o ínfimo das somas das s -ésimas potências dos diâmetros. À medida que δ decresce, o número de δ -coberturas possíveis de F diminui. Portanto, $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ é uma função monótona crescente e se aproxima de um limite (finito ou $+\infty$) quando $\delta \rightarrow 0$. Desta forma, define-se a medida de Hausdorff por

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F). \quad (5.2)$$

Este limite existe para todo conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$, podendo ser 0 ou ∞ . Assim, 5.2 é chamado de medidade Hausdorff s -dimensional de um conjunto F , sendo esta medida uma generalização dos conceitos de comprimento, área e volume.

A partir equação 5.1, observemos que para $t > s$ se $\{U_i\}$ é uma δ -cobertura de F , então temos que

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s \quad (5.3)$$

e, tomando o ínfimo, $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Portanto, vemos que tomando $\delta \rightarrow 0$, se $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, então $\mathcal{H}^t(F) = 0$ para todo $t > s$. O valor de s para o qual ocorre o

salto de 0 para ∞ é chamado de dimensão de Hausdorff¹ de F , denotada por $\dim_H F$. Formalmente

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}, \quad (5.4)$$

isto é,

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & s < \dim_H F \\ 0, & s > \dim_H F, \end{cases} \quad (5.5)$$

conforme representado na figura 5.2.

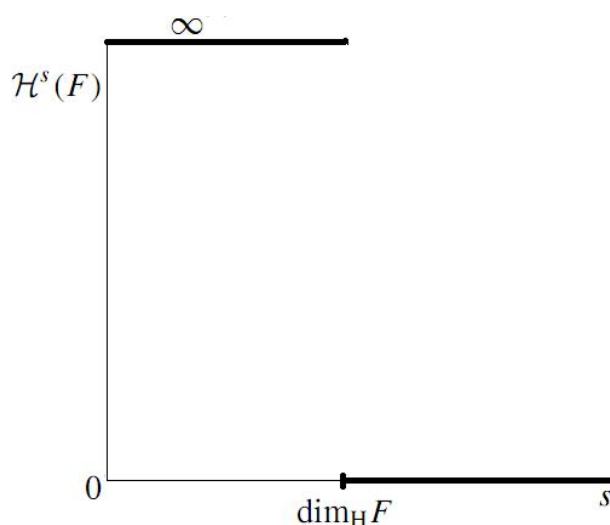


Figura 5.1: Gráfico $(s, \mathcal{H}^s(F))$ de um dado conjunto F . O valor crítico de s onde ocorre o salto de 0 para ∞ é definido como a dimensão de Hausdorff.

Box-Counting

Dos métodos existentes para obtenção de dimensão fractal de um objeto, o chamado box-counting é o mais utilizado devido à sua simplicidade e aplicabilidade numérica. Este método também é conhecido na literatura como *box-dimension*, entropia de Kolmogorov, capacidade dimensional, etc [Falconer1990]. Esta definição relaciona comprimento, área e volume de um dado objeto com seu diâmetro. Isto é, se considerarmos um quadrado de lado unitário e tentarmos cobri-lo usando pequenos quadrados de lado ϵ , a quantidade de quadrados necessária para esse feito será $1/\epsilon^2$. Se tomássemos um segmento de comprimento unitário ou um cubo de aresta unitária e tentássemos cobri-los, respectivamente, por segmentos de tamanho ϵ e cubos de aresta ϵ obteríamos, respectivamente, as quantidades $1/\epsilon$ e $1/\epsilon^3$. Não é coincidência o fato de a dimensão do objeto em questão estar diretamente relacionada à quantidade necessária de objetos para a realização da cobertura pretendida. A dimensão de um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ não-vazio e limitado, pelo método de

¹Alguns autores chamam de dimensão de Hausdorff-Besicovitch.

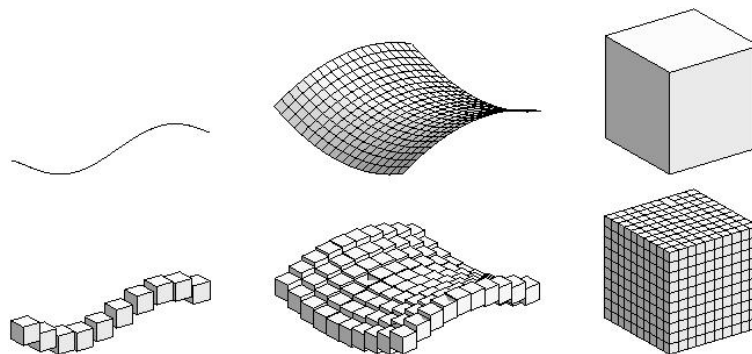


Figura 5.2: Cobertura de uma curva, uma superfície e um cubo sólido com uso de “cubos” de aresta ϵ .

“contagem de caixas” (*box-counting*), é definida da seguinte maneira: para dado $\epsilon > 0$, seja $N_\epsilon(F)$ o número mínimo de cubos n -dimensionais de aresta ϵ necessários para cobrir F . Se existir um número d tal que $N_\epsilon(F) \sim 1/\epsilon^d$, quando $\epsilon \rightarrow 0$, então dizemos que a dimensão *box-counting* de F é d e denotaremos este fato por $\dim_B F = d$. Portanto, para $\epsilon \rightarrow 0$ temos que $d \sim -\log N_\epsilon(F)/\log \epsilon$, ou seja,

$$\dim_B F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log N_\epsilon(F)}{\log \epsilon}. \quad (5.6)$$

A não existência do limite na equação 5.6 nos leva a considerar a dimensão *box-counting* inferior e a dimensão *box-counting* superior, definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B F &= \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log N_\epsilon(F)}{\log \epsilon} \\ \overline{\dim}_B F &= \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log N_\epsilon(F)}{\log \epsilon} \end{aligned}$$

neste sentido, a dimensão *box-counting* é bem definida somente se $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F$.

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\log N_\epsilon(F)}{\log \epsilon} \quad (5.7)$$

Das propriedades de dimensão que comentamos anteriormente, a dimensão *box-counting* apenas não satisfaz a propriedade de estabilidade enumerável e, por isso, conjuntos enumeráveis podem não ter dimensão nula. Por exemplo, considerando o conjunto dos números racionais no intervalo $I = [0, 1]$ e a cobertura deste conjunto obtida por uma partição de I com intervalos de tamanho δ , então teríamos $N_\delta(I) = 1/\delta$. Dessa forma, a dimensão *box-counting* pela definição 5.6 será 1. Contudo, devido ao fato de os números racionais serem enumeráveis, ou seja, reunião enumerável de conjuntos com dimensão 0, devido às propriedades discutidas deveríamos esperar que a $\dim(\mathbb{Q} \cap I) = 0$. Apesar de fatos como este que acabamos de comentar ocorrerem ao considerarmos a dimensão *box-counting*, esta definição de dimensão é amplamente utilizada por físicos sob o pressuposto

que tais situações sejam patologias no mundo físico [Kolwanger1997].

Existem outras definições equivalentes a dimensão *box-counting* que, em algumas ocasiões, são mais convenientes [Falconer1990]. Introduziremos uma que será utilizada na próxima seção quando precisarmos analisar a dimensão do gráfico de uma função.

Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, a coleção de cubos ²

$$\{[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta] : m_i \in \mathbb{Z}\}$$

é chamada de δ -malha de \mathbb{R}^n . Seja $N'_\delta(F)$ o número de cubos da δ -malha que intercepta F , pode se mostrar que [Falconer1990]

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B F &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\log N'_\delta(F)}{\log \delta} \\ \overline{\dim}_B F &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\log N'_\delta(F)}{\log \delta}. \end{aligned}$$

Donde concluímos que a dimensão *box-counting* pode ser obtida pelo método da δ -malha, isto é, ambas definições são equivalentes.

A diferença crucial entre as duas definições apresentadas reside na seguinte observação: na definição da dimensão *box-counting* a idéia é essencialmente cobrir o conjunto com “caixas” de um tamanho fixo, enquanto que na dimensão de Hausdorff considera-se tamanhos menores que um certo valor fixado. Vejamos tal diferença em prática. Consideremos o conjunto dos racionais em $I = [0, 1]$ e tomemos a seguinte cobertura $M = \mathbb{Q} \cap I$: sendo \mathbb{Q} enumerável podemos indexar cada elemento de M por $k \in \mathbb{N}$. Cobrimos assim o k -ésimo racional com um intervalo de comprimento $\delta/2^k$. Para $s > 0$, como a soma $\sum \delta^s/2^{ks}$ é limitada por $K\delta^s$ (para algum $K > 0$) e, devido a $K\delta^s \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, temos que para todo $s > 0$, $\mathcal{H}^s(M) = 0$ e, portanto, $\dim_H M = 0$.

Uma importante relação entre as dimensões Hausdorff e *box-counting* é obtida da seguinte maneira. Se o conjunto F pode ser coberto por $N_\delta(F)$ subconjuntos de diâmetro δ , então, pela equação 5.1

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s.$$

Se $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ então, $\log N_\delta(F) + s \log \delta > 0$ se δ é suficientemente pequeno. Assim, $s \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(F) / -\log \delta$, então

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B F \leq \overline{\dim}_B F.$$

5.1.3 Exemplos

Como meio de ilustrar a utilização das definições de dimensão apresentadas a pouco, consideraremos aqui dois exemplos bem conhecidos de conjuntos fractais: conjunto de

²“cubo” em \mathbb{R} é um intervalo, em \mathbb{R}^2 é um quadrado, etc.

Cantor e a curva de Von Koch. O gráfico da função de Weierstrass também é um exemplo de conjunto fractal, contudo trataremos deste exemplo na próxima seção. Para outros exemplos [Mandelbrot1977, Falconer1990, Edgar1990].

Conjunto Ternário de Cantor

O conjunto Ternário de Cantor é construído a partir do intervalo $I = [0, 1]$, por meio de um processo iterativo que retira partes do intervalo I . Seja $C_0 = I$. Tomemos como C_1 o conjunto obtido de C_0 sem seu terço médio: $C_1 = C_0 \setminus (1/3, 2/3)$, ou seja, C_1 é formado pela união de dois intervalos, a saber $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Seguindo a mesma idéia, $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ é obtido por meio da retirada dos terços médios de cada um dos intervalos de C_1 . Continuando o processo da retirada dos terços médios dos intervalos que constituem os C_{k-1} para se obter os C_k (figura 5.3), obtemos o conjunto ternário (poeira) de Cantor, dado pelo limite da sequência dos conjuntos C_k . Podemos observar que o conjunto C_k consiste da união de 2^k intervalos de comprimento

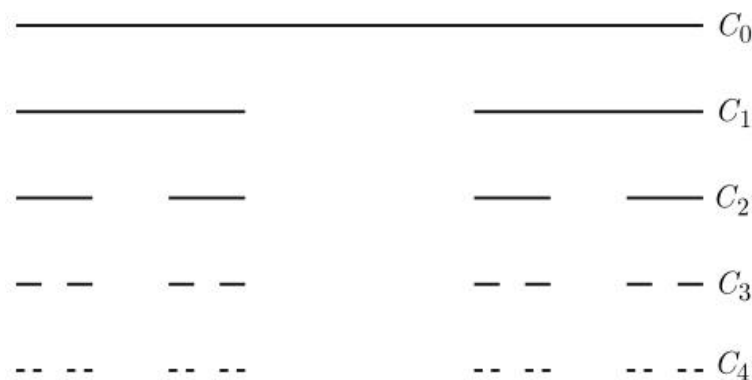


Figura 5.3: Conjunto Ternário de Cantor (Poeira de Cantor).

3^{-k} . Isto significa que precisamos de 2^k intervalos de comprimento 3^{-k} para cobrir o conjunto resultante no passo k -ésimo da iteração. Assim, a dimensão *box-counting* pela equação 5.6 é dada por $\log 2 / \log 3$.

A Curva de Von Koch

Consideremos, novamente, o intervalo $K_0 = [0, 1]$. Removamos o terço médio (o intervalo aberto $(1/3, 2/3)$) e no seu lugar coloquemos, como mostrado na figura 5.4, um triângulo equilátero sem base, obtendo-se o conjunto K_1 que consiste de quatro segmentos. K_2 é obtido tirando-se o terço médio de cada um dos segmentos que constituem K_1 e colocando em seus lugares um triângulo equilátero sem base. Assim, K_2 consiste de 4^2 segmentos. O limite da sequência K_k é o conjunto denominado curva de von Kock. Podemos notar que no k -ésimo passo K_k consiste de 4^k segmentos de comprimento 3^{-k} . Portanto, a dimensão *box-counting* da curva de von Kock será $\log 4 / \log 3$.

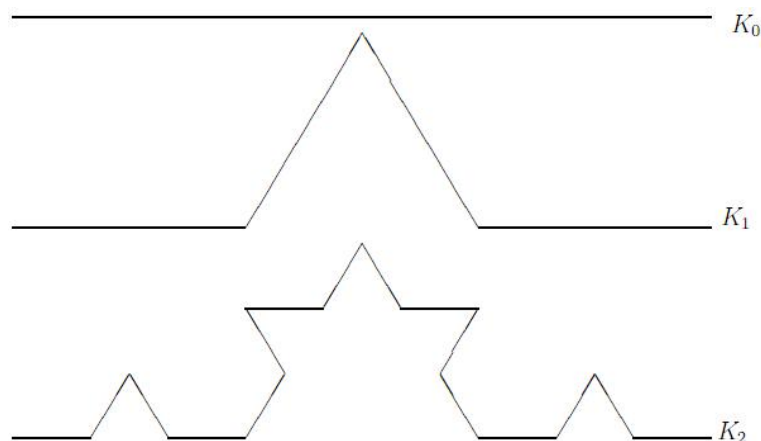


Figura 5.4: Curva de von Koch.

Estes dois exemplos dados acima, apesar de simples (e bem conhecidos), apresentam muitas das características típicas de fractais. Em ambos os exemplos encontramos a auto-similaridade, ou seja, cópias do próprio objeto em diferentes escalas apropriadas. Ainda, mesmo em escalas arbitrariamente pequenas, encontraremos grande riqueza de detalhes. Embora tais conjuntos sejam simples de se construir, dependendo apenas de procedimentos recursivos, vale ressaltar que a geometria dos mesmos não é facilmente descrita pela geometria convencional [Mandelbrot1977, Kolwanger1997].

5.2 Dimensão de Gráfico: Definições e Resultados

Nesta seção temos por interesse apresentar a conexão entre a ordem da DFL e a dimensão *box-counting* de seus gráficos, intermediada pelo expoente de Hölder da função. Apresentaremos aqui dois resultados fundamentais para alcançarmos este objetivo: o primeiro nos auxilia a estimar a quantidade de elementos de uma δ -malha que intercepta o gráfico de uma função contínua; o segundo nos fornece majorantes e minorantes da dimensão *box-counting* através do expoente de Hölder da função em questão. Donde obtemos as conexões almejadas.

Consideremos uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua. O gráfico de f

$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\} \quad (5.8)$$

considerado como um subconjunto do plano $x - y$, pode ser suficientemente irregular de forma que seu gráfico seja fractal (como exemplo 2.10), na verdade, muitos fenômenos, quando plotados como funções do tempo, apresentam características fractais.

Consideremos agora, alguns resultados simples porém, de enorme utilidade na estimação da dimensão *box-counting* de gráficos. Dada uma função f e um intervalo da reta

$[a, b]$, definiremos por $M_f[a, b]$:

$$M_f[a, b] = \sup_{a \leq x, y \leq b} |f(x) - f(y)|$$

isto é, a maior distância entre duas imagens de f com relação ao intervalo $[a, b]$.

Proposição 5.2.1 *Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suponha que $0 < \delta < 1$, e m seja o menor inteiro maior ou igual a $1/\delta$. Então, se N_δ é o número de quadrados da δ -malha que intercepta o gráfico de f , temos que*

$$\delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} M_f[i\delta, (i+1)\delta] \leq N_\delta \leq 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} M_f[i\delta, (i+1)\delta].$$

Prova: Da continuidade de f , temos que δ -malha intercepta o gráfico de f (restrito a cada intervalo de largura δ) em, pelo menos, $M_f[i\delta, (i+1)\delta]/\delta$ e, no máximo, $2 + M_f[i\delta, (i+1)\delta]/\delta$. Temos assim que a quantidade de interseções da δ -malha com o gráfico de f é dada pela soma correspondente a todos os m intervalos de largura δ , isto é:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{M_f[i\delta, (i+1)\delta]}{\delta} \leq N_\delta \leq 2m + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{M_f[i\delta, (i+1)\delta]}{\delta}. \quad \square \quad (5.9)$$

Corolário 5.2.2 *Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.*

a) *Supondo que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{2-s}$, para $0 \leq x, y \leq 1$, com $M > 0$ e $1 \leq s \leq 2$. Então $\dim_B \text{graf}(f) \leq s$.*

b) *Supondo que existam números $M > 0$, $\delta_0 > 0$ e $1 \leq s < 2$ com a seguinte propriedade: para cada $x \in [0, 1]$ e $0 < \delta < \delta_0$, existe y tal que $|x - y| \leq \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq M\delta^{2-s}$. Então $s \leq \dim_B \text{graf}(f)$.*

Prova: a) Como f é $(2-s)$ -Hölder, com $1 \leq s \leq 2$, temos que $M_f[x, y] \leq M|x - y|^{2-s}$, para $0 \leq x, y \leq 1$. Da proposição temos que $m < 1 + 1/\delta$ e $0 < \delta < 1$, assim

$$\begin{aligned} N_\delta(\text{graf}(f)) &\leq 2m + \delta^{-1}mM\delta^{2-s} \\ &\leq (1 + \delta^{-1})(2 + M\delta^{-1}\delta^{2-s}) \\ &= (1 + \delta^{-1})(2 + M\delta^1\delta^{-s}) \\ &< 2\delta^{-1}(2 + M\delta^1\delta^{-s}) \\ &= 4\delta^{-1} + M\delta^{-s} \\ &\leq 4\delta^{-s} + M\delta^{-s} \\ &= M_1\delta^{-s}, \end{aligned}$$

onde M_1 independe de δ . Segue que

$$\dim_B \text{graf}(f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(\text{graf}(f))}{-\log \delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_1 \delta^{-s}}{-\log \delta} = s.$$

b) Dado $x \in [0, 1]$, seja y tal que $|f(x) - f(y)| \geq M\delta^{2-s}$, com M, δ_0 e s como na hipótese. Temos então que $M_f[x, y] \geq M|x - y|^{2-s}$. Como $\delta^{-1} \leq m$, obtemos da relação 5.9 que

$$N_\delta(\text{graf}(f)) \geq \delta^{-1} m M \delta^{2-s} \geq \delta^{-1} \delta^{-1} M \delta^{2-s} = M \delta^{-s}.$$

Assim,

$$\dim_B \text{graf}(f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(\text{graf}(f))}{-\log \delta} \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_1 \delta^{-s}}{-\log \delta} = s. \quad \square$$

Tomemos, como exemplo da aplicação dos resultados acima, a função de Weierstrass 2.10. Para $\lambda > 1$ e $1 < s < 2$, seja $W_\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$W_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} \text{sen}(\lambda^n x).$$

Então para $\lambda > 1$ suficientemente grande, $\dim_B \text{graf}(W_\lambda) = s$. De fato, como foi mostrado anteriormente (equação 4.8), $W_\lambda(x)$ é $(2 - s)$ -Hölder em $[0, 1]$. Logo, pelo item *a* do Corolário 5.2.2, $\dim_B \text{graf}(W_\lambda) \leq s$. Agora, se em 4.5 dividirmos a soma em três partes: $N - 1$ termos, N -ésimo termo e os termos restantes, isto é:

$$\begin{aligned} W_\lambda(x+h) - W_\lambda(x) &= \lambda^{(s-2)N} [\text{sen}(\lambda^N(x+h)) - \text{sen}(\lambda^N(x))] = \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \lambda^{(s-2)n} [\text{sen}(\lambda^n(x+h)) - \text{sen}(\lambda^n(x))] + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)n} |[\text{sen}(\lambda^n(x+h)) - \text{sen}(\lambda^n(x))]| \\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \lambda^{(s-2)n} \lambda^n h + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2\lambda^{(s-2)n} \lambda^n \\ &\leq h \frac{\lambda^{(s-2)N+1-s}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

para $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$. Observamos ainda que

$$|W_\lambda(x+h) - W_\lambda(x)| \geq \left| \lambda^{(s-2)N} [\text{sen}(\lambda^N(x+h)) - \text{sen}(\lambda^N(x))] - h \frac{\lambda^{(s-2)N+1-s}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \right|. \quad (5.11)$$

Supondo $\lambda > 2$ suficientemente grande de forma que

$$h \frac{\lambda^{(s-2)N+1-s}}{1 - \lambda^{1-s}} + \frac{\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1 - \lambda^{s-2}} \leq \frac{1}{20} \lambda^{(s-2)N} \quad (5.12)$$

para todo N . Para $\delta < \lambda^{-1}$, tomemos N tal que $\lambda^{-N} \leq \delta < \lambda^{-(N-1)}$. Dado x , podemos

escolher h , com $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N} < \delta$, obtendo $|\text{sen}(\lambda^N(x+h)) - \text{sen}(\lambda^N x)| > 1/10$. Assim, de 5.11 temos que:

$$|W_\lambda(x+h) - W_\lambda(x)| \geq \frac{1}{10}\lambda^{(s-2)N} - \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N} = \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N} \geq \frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N}\delta^{2-s}. \quad (5.13)$$

Donde concluímos, do item b do corolário 5.2.2, que $s \leq \dim_B \text{graf}(W_\lambda)$. Logo

$$\dim_B \text{graf}(W_\lambda) = s. \quad (5.14)$$

Do teorema 4.3.3 e do corolário 5.2.2 obtemos então o seguinte resultado

Teorema 5.2.1 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\alpha \in (0, 1)$.*

a) Se $0 < q < 1$ é tal que

$$\mathbb{D}^q f(x_0) = 0, \quad \text{para } q < \alpha \quad (5.15)$$

para todo $x_0 \in (a, b)$, então $\dim_B \text{graf}(f) \leq 2 - \alpha$.

b) Se existir uma sequência $x_n \rightarrow x_0$, tal que

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{d^q(f(x_n) - f(x_0))}{[d(x_n - x_0)]^q} = \pm\infty, \quad \text{para } q > \alpha$$

para todo x_0 , então $\dim_B \text{graf}(f) \geq 2 - \alpha$.

Prova: Segue diretamente do teorema 4.3.3 e do corolário 5.2.2. Donde obtemos a conexão entre a ordem da DFL e a dimensão *box-counting* do gráfico da $f(x)$.

Concluímos assim, com este último resultado, a apresentação de algumas das conexões existentes entre a ordem da DFL, expoente de Hölder e dimensão *box-counting*.

Capítulo 6

Conclusões

- Neste trabalho dissertamos a respeito de funções contínuas não diferenciáveis (FCND), em particular sobre as funções de Weierstrass, Riemann, Bolzano, Cellèrie e Darboux. Ressaltamos a importância desse tipo de função em diversos aspectos, principalmente em relação à sua incrível complexidade (fractalidade). Nesse estudo, o cálculo diferencial clássico não é aplicável, o que nos leva a buscar extensões viáveis para a operação de derivação.
- Com o objetivo de estudar as FCND, apresentamos uma introdução ao cálculo fracionário incluindo definições, propriedades e exemplos. Em particular, discutimos a definição de Riemann-Liouville, sendo também observados alguns problemas relacionados com esta definição, a saber: (i) não-localidade e (ii) derivada de constante não nula, podendo esta derivada até mesmo não existir.
- Apresentamos a definição de expoente de Hölder de uma função real e , a partir deste, obteve-se uma condição suficiente para a existência de derivadas fracionárias. Concluímos desta forma que a função de Weierstrass 2.10, que é $(2 - s)$ -Hölder, possui derivadas fracionárias de ordem $0 < q < 1$, com $q < 2 - s$.
- Introduzimos o conceito de Derivada Fracionária Local (DFL) [Adda and Cresson2001, Kolwankar and Gangal1996] visando o estudo local de FCND e também com o intuito de poder corrigir os problemas inerentes à definição de Riemann-Liouville.
- Relacionamos expoente de Hölder com a ordem da DFL, verificando a equivalência entre estes.
- Fizemos uma breve introdução à teoria fractal onde foram apresentadas as definições de dimensão de Hausdorff e *box-counting*. Discutimos alguns resultados que auxiliam na determinação da dimensão *box-counting* e relacionamos esta dimensão com o respectivo expoente de Hölder da função. Por meio do expoente de Hölder, apresentamos também uma conexão direta entre a ordem da DFL e a dimensão *box-counting* do gráfico de uma FCND.

- Este presente trabalho, que se baseia principalmente nas idéias apresentadas e discutidas em [Adda and Cresson2001, Kolwankar and Gangal1996], teve por objetivo apontar as conexões entre a fractalidade intrínseca às FCND e sua diferenciabilidade fracionária. Concluimos que o desenvolvimento do cálculo fracionário, especialmente do estudo das DFL's, está intimamente relacionado ao estudo das FCND. Neste sentido, ainda há alguns desafios a serem explicados. Dentre aqueles que julgamos mais importantes, destacamos: (i) relacionar (se possível) a ordem da DFL com a respectiva dimensão de Hausdorff uma vez que ambas têm comportamentos semelhantes em relação ao “salto” do zero para o infinito; (ii) obtenção de uma generalização para o teorema do valor médio para a DFL.

Apêndice A

Séries, Sequências e Convergência

Tipicamente, as construções de FCND (funções contínuas não-diferenciáveis) são baseadas em séries infinitas de funções. Portanto, reservamos este apêndice para demonstrações de alguns resultados sobre séries e sequências de funções que foram de grande utilidade para verificação de propriedades de convergência e continuidade.

Definição A.0.1 *Uma sequência $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ converge pontualmente para um $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se para cada x em I :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

isto é,

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

A convergência é dita uniforme se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

isto é,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in I,$$

ou seja, neste caso $N = N(\epsilon)$.

Os teoremas que seguem abaixo são ferramentas úteis para a verificação de convergência uniforme.

Teorema A.0.1 *A sequência de funções $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente se, e somente se,*

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| = 0,$$

ou seja,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N, \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Prova: Admitindo que f_n converge uniformemente para f , temos que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, para ϵ dado e quaisquer $m, n > N$:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq \sup_{x \in I} (|f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)|) \\ &\leq \sup_{x \in I} (|f_n(x) - f(x)|) + \sup_{x \in I} (|f_m(x) - f(x)|) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Reciprocamente, admitindo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| = 0$, ou seja,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N, \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

temos que para $x \in I$ fixado, $f_n(x)$ é uma sequência de Cauchy de números reais e, portanto, converge para um número real $f(x)$. Dessa forma, a partir da hipótese e da convergência pontual que a pouco foi estabelecida, teremos

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N, \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in I, \exists m_x \in \mathbb{N} : m_x > N, |f_{m_x}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Uma vez que $\epsilon > 0$ é arbitrário e $n > N$, então

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| &\leq \sup_{x \in I} (|f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f(x)|) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto a convergência $f_n(x) \rightarrow f(x)$ é uniforme em I .

Teorema (teste de Weierstrass) A.0.2 *Seja $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções tal que $\sup_{x \in I} |f_n(x)| \leq M_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é uniformemente convergente em I .*

Prova: Sejam $m < n \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} \sup_{x \in I} |S_n(x) - S_m(x)| &= \sup_{x \in I} \left| \sum_{j=1}^n f_j(x) - \sum_{j=1}^m f_j(x) \right| \\ &= \sup_{x \in I} \left| \sum_{j=m+1}^n f_j(x) \right| \\ &\leq \sum_{j=m+1}^n \sup_{x \in I} |f_j(x)| \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=m+1}^n M_j = \sum_{j=0}^n M_j - \sum_{j=0}^m M_j.$$

Como $M = \sum_{j=0}^{\infty} M_j < \infty$, segue que

$$\sum_{j=0}^n M_j - \sum_{j=0}^m M_j \rightarrow M - M = 0, \text{ quando } m, n \rightarrow \infty,$$

isto é, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} |S_n(x) - S_m(x)| = 0$. Pelo teorema anterior, a série $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ converge uniformemente.

Usualmente, há o interesse de se estabelecer a continuidade do limite de uma sequência de funções contínuas. Para este fim, o teorema e o corolário seguintes são de grande valia.

Teorema A.0.3 *Se $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência de funções contínuas e $f_n \rightarrow f$ uniformemente, com $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, então f é contínua em I .*

Prova: Seja $x_0 \in I$ arbitrário. Da convergência uniforme de f_n para f temos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3},$$

e da continuidade de cada f_n

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta, \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3},$$

sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$ com $n > N$ e $|x - x_0| < \delta$. Então

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< 3 \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Corolário A.0.1 *Se $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência de funções contínuas e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente, com $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, então f é contínua em I .*

Prova: Segue diretamente do teorema anterior.

Para maiores detalhes indicamos as referências [Lima2007, Bartle1964].

Apêndice B

Propriedades Elementares da Função Gama

Diretamente relacionada com a definição de derivada fracionária, a função $\Gamma(x)$ tem um importante papel na generalização da derivada clássica, por isso discutimos aqui alguns dos conceitos utilizados no decorrer na dissertação.

Consideremos a seguinte integral

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-st} dt, \quad (\text{B.1})$$

com $k > -1$ para evitar a divergência da mesma em $t = 0$. Quando $k = 0$ ou um inteiro positivo, essa integral pode ser facilmente calculada:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \frac{1}{s^2}, \quad \dots, \quad (\text{Re}(s) > 0).$$

Por meio de uma integração por partes mostra-se que

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-st} dt = \frac{k}{s} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-st} dt \quad (s > 0), \quad (\text{B.2})$$

e por indução obtém-se

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-st} dt = \frac{k}{s} \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-st} dt = \dots = \frac{k}{s} \frac{k-1}{s} \dots \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad (s > 0). \quad (\text{B.3})$$

Para $s = 1$ nesta última equação, tem-se uma representação integral para o fatorial:

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt = k!. \quad (\text{B.4})$$

Observemos que a equação B.4 sugere um método para se generalizar a função fatorial para valores $k > -1$ reais. Consideremos então a seguinte definição:

Definição B.0.1 A função gama $\Gamma(k)$ é definida pela seguinte integral

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(k) > 0. \quad (\text{B.5})$$

Quando k é inteiro positivo valem

$$\Gamma(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 1 \\ 1.2.3\dots k - 1, & \text{se } k > 0. \end{cases},$$

ou seja, $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(k) = (k - 1)!$.

Agora, de B.2 obtém-se

$$\int_0^{\infty} t^k e^{-st} dt = \frac{\Gamma(k + 1)}{s^{k+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0, k > -1)$$

donde

$$\Gamma(k + 1) = k\Gamma(k). \quad (\text{B.6})$$

Esta última é chamada de equação funcional da função gama, e a partir dela conclui-se que

$$\lim_{k \rightarrow 0+} \Gamma(k) = \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{\Gamma(k + 1)}{k} = +\infty. \quad (\text{B.7})$$

Ainda de B.6 temos que

$$\Gamma(k + 1) = k\Gamma(k) \Rightarrow$$

$$\Gamma(k + 2) = (k + 1)\Gamma(k + 1) = (k + 1)k\Gamma(k) \Rightarrow$$

$$\Gamma(k + 3) = (k + 2)\Gamma(k + 2) = (k + 2)(k + 1)\Gamma(k + 1) = (k + 2)(k + 1)k\Gamma(k)$$

e, por indução:

$$\Gamma(k + n) = (k + n - 1)(k + n - 2)\dots(k + 2)(k + 1)k\Gamma(k),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, podemos escrever

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k + n)}{(k + n - 1)(k + n - 2)\dots(k + 2)(k + 1)k}, \quad (\text{B.8})$$

e de B.7 obtemos

$$\lim_{k \rightarrow -n} |\Gamma(k)| = \lim_{k \rightarrow -n} \left| \frac{\Gamma(k + n)}{(k + n - 1)(k + n - 2)\dots(k + 2)(k + 1)k} \right| = +\infty. \quad (\text{B.9})$$

Verificamos assim que a função $\Gamma(k)$ não está definida para valores inteiros negativos. Contudo, observemos que a equação B.6 permite-nos definir Γ em $(-1, 0)$: se $k \in (-1, 0)$, então $k + 1 \in (0, 1)$ onde $\Gamma(k + 1)$ está definido. Portanto, é válido escrever

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k + 1)}{k}.$$

Uma vez que $\Gamma(k+1) > 0$ para $-1 < k < 0$, temos que $\Gamma(k) < 0$ e assim

$$\lim_{k \rightarrow 0^-} \Gamma(k) = \lim_{k \rightarrow -1^+} \Gamma(k) = -\infty.$$

Dessa forma, vemos que Γ está definida em $(-1, 0) \cup (0, \infty)$, como nos mostra a figura B.1.

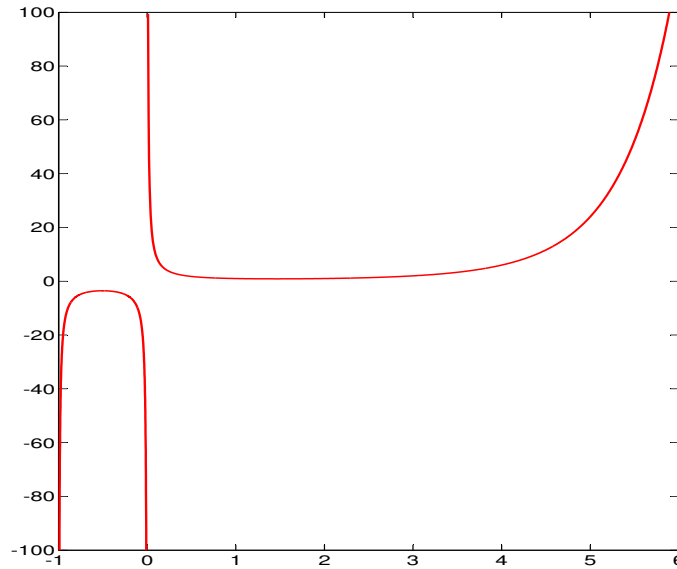


Figura B.1: Função de gama em $(-1, 0) \cup (0, \infty)$.

Utilizando os mesmos argumentos acima, podemos mostrar que Γ está definida em $(-2, -1)$: se $k \in (-2, -1)$, então $k+1 \in (-1, 0)$, donde vimos anteriormente que Γ permanece definida. Agora, como $\Gamma(k+1) < 0$ para $k+1 \in (-1, 0)$, segue novamente da equação funcional B.6 que para $k \in (-2, -1)$ temos $\Gamma(k) > 0$ e

$$\lim_{k \rightarrow -1^-} \Gamma(k) = \lim_{k \rightarrow -2^+} \Gamma(k) = +\infty.$$

Portanto, Γ está definida em $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$, conforme nos mostra a figura B.2. A partir deste processo podemos mostrar que Γ está definida em (veja figura B.3)

$$\mathbb{R} - \{\dots, -3, -2, -1, 0\}.$$

Proposição B.0.1

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (\text{B.10})$$

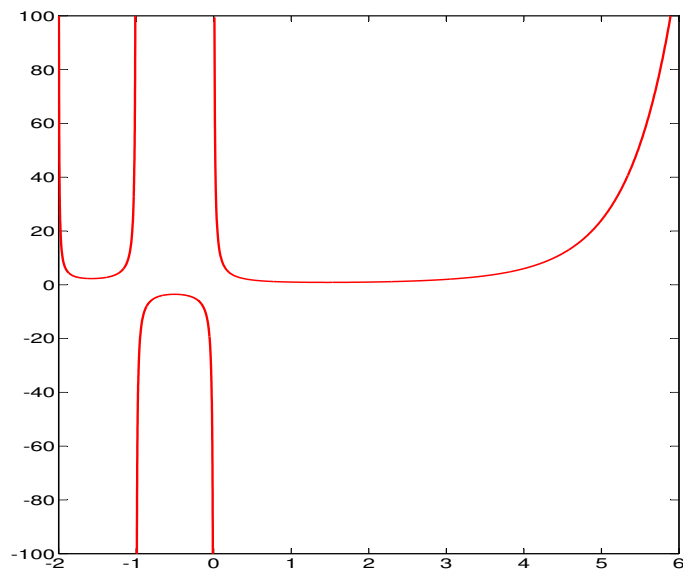


Figura B.2: Função gama, domínio $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

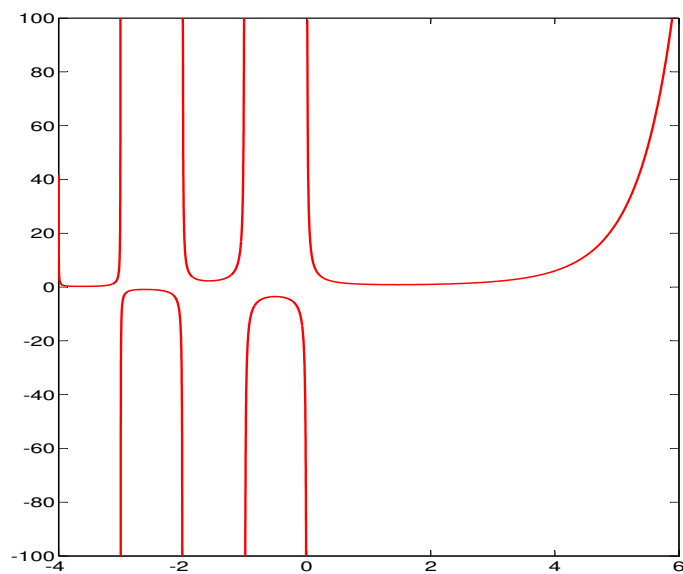


Figura B.3: Função gama.

Prova: Da própria definição da função gama temos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt.$$

Façamos então a seguinte mudança de variável $t = r^2$. Dessa forma:

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr.$$

Para o cálculo de $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, usaremos de um conhecido artifício concebido por Liouville.

Fazendo

$$M = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dt,$$

temos que:

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Obtemos M^2 expresso por uma integral dupla em que a região de integração localiza-se no primeiro quadrante. Usando coordenadas polares $x = \rho \cos(\theta)$ e $y = \rho \sin(\theta)$:

$$M^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi - e^{-\rho^2}}{2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

Segue assim que $M = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donde temos que

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow 2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$$

e, portanto

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \blacksquare$$

Agora temos uma propriedade que nos permite calcular o valor de Γ para semi-inteiros. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

É fácil ver que a regra geral para semi inteiros será

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{\overbrace{2n-1 \ 2n-3 \ \dots \ 1}^{\text{produto de ímpares}}}{2} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

sendo o produto dos n primeiros ímpares dado por $\frac{(2n)!}{2^n n!}$. Temos ainda que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-4)^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!}.$$

Apresentamos a seguir mais alguns valores admitidos pela função Γ em semi inteiros [Oldham and Spanier1974].

Alguns valores de Γ	
para inteiros e semi-inteiros	
$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$	$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(-1) = -\infty$	$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$	$\Gamma(2) = 1$
$\Gamma(0) = +\infty$	$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$	$\Gamma(3) = 2$

Podemos mencionar ainda algumas identidades para função gama sobre os inteiros:

$$\Gamma(-k) = \frac{-\pi \operatorname{cosec}(\pi k)}{\Gamma(k+1)}, \quad (\text{B.11})$$

$$\Gamma(2k) = \frac{4^k \Gamma(k) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}}, \quad (\text{B.12})$$

sendo [B.11](#) chamada de reflexão e [B.12](#) de fórmula de duplicação.

Dentre as funções especiais relacionadas com a função gama, não podemos deixar de mencionar a função beta [[Oldham and Spanier1974](#)]:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad p, q > 0,$$

e também a função gama incompleta

$$\begin{aligned} \gamma^*(c, x) &= \frac{c^{-x}}{\Gamma(x)} \int_0^c t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= e^{-x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j+c+1)}. \end{aligned}$$

Para maiores detalhes indicamos: [[Oldham and Spanier1974](#), [Abramowitz and Stegun1972](#), [Zygmund1959](#), [Kilbas et al.2006](#)].

Referências Bibliográficas

- [Abramowitz and Stegun1972] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1972. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover, New York, 9 edition.
- [Adda and Cresson2001] Adda, F. B. and Cresson, J. 2001. About non-differentiable functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 263:721–737.
- [Agrawal2006] Agrawal, O. P. 2006. Fractional variational calculus and the transversality conditions. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39:10375–10384.
- [Bartle1964] Bartle, R. G. 1964. *The Elements of Real Analysis*. John Wiley and Sons, 2 edition.
- [Camargo2009] Camargo, R. F. 2009. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. PhD thesis, IMECC-UNICAMP, Campinas.
- [Cipra2003] Cipra, B. A. 2003. A healthy heart is a fractal heart. *SIAM News*, 36(7):1–2.
- [de Rham1957] de Rham, G. 1957. Sur un exemple de fonction continue sans dérivée. *Enseing. Math.*, 3:71–72.
- [Edgar1990] Edgar, G. A. 1990. *Measure, Topology and Fractal Geometry*. Springer.
- [Falconer1990] Falconer, K. 1990. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons, Chinchester, 2 edition.
- [Gerver1970] Gerver, J. 1970. The differentiability of the riemann’s function at certain rational multiples of π . *Amer. J. Math.*, 92:33–55.
- [Goldberger et al.2002] Goldberger, L., Amaral, L. A. N., Hausdorff, J. M., Ivanov, P. C., Peng, C. K., and Stanley, H. E. 2002. Fractal dynamics in physiology: Alterations with disease and aging. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99:24662472.
- [Hardy1916] Hardy, G. H. 1916. Weierstrass’s non differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17:301–325.
- [Hardy1945] Hardy, G. H. 1945. Riemanns form of taylors series. *J. London Math. Soc.*, 20:48–57.

- [Hilfer2001] Hilfer, R. 2001. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, Singapore.
- [Itatsu1981] Itatsu, S. 1981. Differentiability of the riemann's function. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 57(10):492–495.
- [Jarnik1981] Jarnik, V. 1981. Bolzano and the foundations of mathematical analysis: Bolzano's function. In *Bolzano Colection*, page 6781. Czech Digital Mathematics Library.
- [Kilbas et al.2006] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, volume 204. Elsevier, Amsterdam.
- [Kolwanger1997] Kolwanger, K. M. 1997. *Study of Fractal Structures and Processes Using Methods of Fractional Calculus*. PhD thesis, University of Pune, Pune.
- [Kolwankar and Gangal1996] Kolwankar, K. M. and Gangal, A. D. 1996. Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions. *Chaos*, 6:505–523.
- [Liang and Su2007] Liang, Y. and Su, W. 2007. Connection between the order of fractional calculus and fractional dimensions of a type of fractal functions. *Analysis in Theory and Applications*, 23(4):354–362.
- [Lima2007] Lima, E. L. 2007. *Análise Real: Funções de Uma Variável*, volume 1. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro.
- [Mandelbrot1977] Mandelbrot, B. 1977. *Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, New York.
- [Miller and Ross1993] Miller, K. S. and Ross, B. 1993. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley and Sons, New York.
- [Munkhammar2005] Munkhammar, J. D. 2005. Fractional calculus and the taylor-riemann series. Technical report, Rose Hulman Institute of Tecnology - MathJournal, Terre Haute.
- [Oldham and Spanier1974] Oldham, K. B. and Spanier, J. 1974. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York.
- [Osler1970] Osler, T. 1970. *Leibniz Rule, the Chain Rule and Taylors Theorem for Fractional Derivatives*. PhD thesis, New York University, New York.
- [Osler1972a] Osler, T. J. 1972a. The fractional derivative of a composite function. *SIAM J. Math. Anal.*, 1(2):288–293.

- [Osler1972b] Osler, T. J. 1972b. The integral analog of the leibniz rule. *Mathematics of Computation*, 26(120):903–915.
- [Oxtoby1971] Oxtoby, J. C. 1971. *Measure and Category*. Springer-Verlag, New York.
- [Pinkus2000] Pinkus, A. 2000. Weierstrass and approximation theory. *J. Approx. Theory*, 107:1–66.
- [Podlubny1998] Podlubny, I. 1998. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, volume 198. Mathematics in Science and Engineering, San Diego.
- [Podlubny2002] Podlubny, I. 2002. Geometric and physical interpretation of fractional integral and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5(4):367–386.
- [Ross et al.1993] Ross, B., Samko, S. G., and Love, E. R. 1993. Functions that have no first order derivative might have all fractional derivatives of all orders less than one. *Real Analysis Exchange*, 20:140–157.
- [Schneider and Wyss1989] Schneider, W. R. and Wyss, W. 1989. Fractional diffusion and wave equations. *J. Math. Phys.*, 30(1):134–144.
- [Thim2003] Thim, J. 2003. Continuous non differentiable functions. Master’s thesis, Lulea University of Technology, Lulea.
- [Trujillo et al.1999] Trujillo, J. J., Rivero, M., and Bonilla, B. 1999. On a riemann-liouville generalize taylor’s formula. *J. Math. Anal*, 231(1):255–265.
- [Yao et al.2008] Yao, K., Liang, Y., and F.Zhang 2008. On the conection between the order of the fractional derivative and the hausdorff dimension of a fractal function. *Chaos, Solitions and Fractals*, 41:2538–2545.
- [Zaslavsky2002] Zaslavsky, G. 2002. Chaos, fractional kinetics and anomalous transport. *Physics Reports*, 371:461–580.
- [Zygmund1959] Zygmund, A. 1959. *Trigonometric Series*, volume 1, 2. Cambridge Univ. Press, New York, 2 edition.

Súmula Curricular

Dados Pessoais

Nome: Douglas Azevedo Sant'Anna

Naturalidade: São Paulo Data de Nascimento: 09\04\1983

Educação

Ensino Médio: Raquel de Castro Ferreira

Cidade: Guarujá

Término: 2000

Graduação: Licenciatura Plena em Matemática

Universidade: Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho” – UNESP

Campus: FCT – Presidente Prudente

Início: 03\2004 - Término: 12\2007

Formação Complementar

2008 - 2008 Curso de Verão Análise na reta. (Carga horária: 48h).

Universidade Federal do ABC, UFABC, Brasil.

2007 - 2007 ALGEBRA LINEAR. (Carga horária: 64h).

Universidade Estadual de Campinas.

2006 - 2006 Uma Introdução à Teoria dos Códigos. (Carga horária: 6h).

Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional.

2005 - 2005 Java Crash Course. (Carga horária: 8h).

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, Brasil.

2005 - 2005 Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações. (Carga horária: 6h).

Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional.

2005 - 2005 Introdução ao Matlab. (Carga horária: 6h).

Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, Brasil.

Atividades Acadêmicas

Bolsa Mestrado: UFABC Período:01\2008 – 05\2008

Bolsa Mestrado: CAPES Período:06\2008 – 12\2009

Publicações Artigos

Resumo Publicado em Anais de Congresso:

1- SANT' ANNA, D. A. ; Venegeroles, R . Derivadas Fracionárias Aplicadas ao Estudo de Funções Contínuas Não-Diferenciáveis e Dimensões. In: Seminários Brasileiro de Análise, 2009, Florianópolis. SBA - 69º Seminário Brasileiro de Análise - Trabalhos Apresentados, 2009.

2- SANT' ANNA, D. A. ; MENEGUETE JR, M. . Padronização Matemática de Folhas Compostas para Fins de Busca por Conteúdo. In: CNMAC(Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional), 2007, Florianópolis. Normalização de Imagens de Folhas para fins de busca por conteúdo. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2007, São Paulo. Anais do XXX CNMAC, 2007.

3- SANT' ANNA, D. A. ; MENEGUETE JR, M. . Wavelets e Busca por Conteúdo: Folhas Compostas. In: Congresso de Iniciação Científica-Unesp, 2007, Presidente Prudente. Anais XIX Congresso de Iniciação Científica da Unesp, 2007.

4- SANT' ANNA, D. A. ; MENEGUETE JR, M. . Wavelets e Busca por Conteúdo: Folhas Compostas. In: Congresso de Iniciação Científica-Unesp, 2007, Presidente Prudente. Anais XIX Congresso de Iniciação Científica da Unesp, 2007.

5- SANT' ANNA, D. A. ; MENEGUETE JR, M. . Wavelets e Busca por Conteúdo: Folhas Compostas. In: Congresso de Iniciação Científica-Unesp, 2007, Presidente Prudente. Anais XIX Congresso de Iniciação Científica da Unesp, 2007.